数学科　公開授業Ⅱ

数学的モデルとしての微分方程式を生み出す授業

学　習　指　導　案

日時　平成 26 年 6 月 21 日（土曜日）11:10-12:00
対象　東京学芸大学附属国際中等教育学校 6 年
　　　数学 6αR クラス　15 名(男 8 名, 女 7 名)
授業者　教諭　小林　廉

※本公開研究会冊子（pp.104-115）に載せた内容を一部変更しています．大変申し訳ありません．

１．本研究授業上の問い

本時は，本校第 5・6 学年における目標の一つである「現実の問題を解決するために，定式化，処理，解釈・評価のプロセスを遂行することができる」ことを目的とした授業の一環であり，特に次のプロセスを遂行できる力の育成に焦点化するものである．それは，「現実の問題を解決するために，数学的モデルとして微分方程式に定式化し，処理し，解釈・評価する」プロセスである．初めてその活動を行うことになる本時では，数学的モデルとして微分方程式を用いて現実の問題を解決するという発想を獲得すること，そして改めて数学的モデル化のプロセスおよびそれを遂行するに当たって必要となる考え方を実感することが目標である．実用的価値の高い微分方程式を数学的モデルとして用いる経験は，数学教育の実用的目的に応えるものであると考える．

とりわけ，本時では微分方程式とその使い方を「説明する」授業ではなく，数学的モデルとしての微分方程式を生徒たちが「生み出す」授業を実現したい．なぜなら，現象を探究しながら微分方程式を生み出すことで，どんな状況において微分方程式が有効であるのかということや，微分方程式自身の意味が実感されることを期待できるからである．

それでは，数学的モデルとしての微分方程式を生み出す授業とはどのようであるべきか．微分方程式は変化自身を記述する数式である．そこでは，問題解決者が変化の状態について仮定をおく必要が生ずる．変化の状態について仮定をおき，その変化自身を記述するという発想はいかにして生み出されるのだろうか．授業者は，生徒たちがその発想を生み出すためにどのような手立てを講ずる必要があるのだろうか．これが本研究授業上の問いである．この問いに対して，教材に即した具体的な手立ては後述するが，基本的な方針として以下の三点を手立てとして据えたい．

・手立て①：活動を促す手立てとしての探究課題への問いの埋め込み
・手立て②：活動を発展させる手立てとしての活動の振り返り
・手立て③：生徒たちが探究の道具として利用できる数学の内容としての「数列」の利用

手立て①と②はどの授業においても講ずる手立てであるが，③は微分方程式を生み出すことを意図しているからこその手立てである．生徒たちは単元「数列」において，変化を漸化式に定式化して探究する方法を学習してきている．これを踏まえて本時では，漸化式を差分方程式として見直すことで，隣接二項間の差という変化自身を記述しているという見方をできるようにしたい．もちろん，差分方程式自体有効なツールであるが，ここでは，離散的変化から連続的変化へと促すことによって，微分方程式が生み出されることを期待する．

これを図 1「水準を高める授業の構造」の枠組みで整理する．本時では，現象における変化を既習事項である漸化式で表現する水準から，生み出す対象である微分方程式で表現する水準へと高めることを意図する．そのためにまず，漸化式で表現することのできる（逐次的変化となる）現実の問題を用意する（手立て①）．これを生徒たちが漸化式に表現して処理した後，漸化式を差分方程式として見直す（手立て③②）．さらに，離散的変化ではなく連続的変化をみる必要性のある現実の問題にしておくことで（手立て①），単位時間を縮めていくことを議論し，微分方程式を用いる水準へと高めたい．

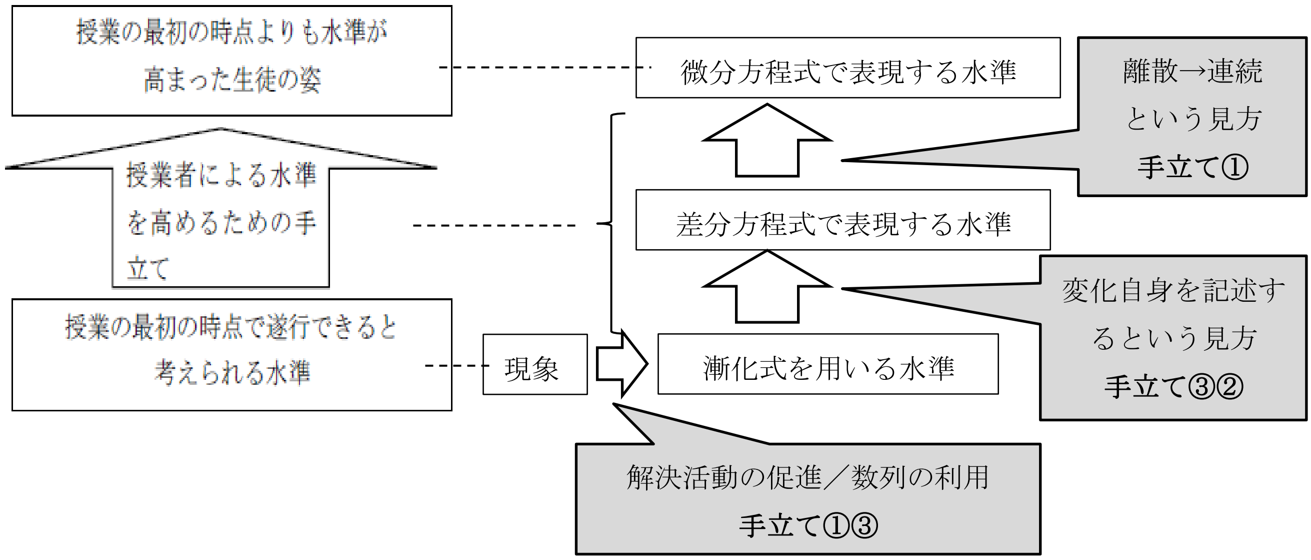


図 1　本授業における水準を高める授業の構造

特に本時では，具体的な教材に即して，漸化式を差分方程式として見直すための手立てと，差分方程式から微分方程式へと発展するための手立てを明示化し，それが機能するかを検証する．

２．本時の教材について

（1）探究課題と差分方程式・微分方程式

本時では，感染症の数理モデルとして最も古典的・基本的であると言われる「SIR モデル」を題材として，生徒たちに以下の探究課題を提示する（SIR モデルの理論的背景に関しては本公開研究会冊子を参照，ただし冊子作成時から問題の条件が変わっています．申し訳ありません）．

ある感染症にかかっている 1 人が，総人数が 10 万人である集団に入り込んだとする．この感染症は，感染者と接触した未感染者のうち 1.8%の人が感染する感染力をもち，感染者が感染力を有する期間は 1 週間であるという．また，感染力を失った（回復した）人はこの感染症に対する免疫を獲得するとする． あなたはこの集団における公衆衛生の責任者であり，この感染症の流行を予期して予防接種を促したい立場であるとする．調べてみたところ，この集団では 1 人が 1 週間で延べ平均 70 人と接触することがわかった． （1）何も対策をしないときの，週ごとの感染者数の変化をシミュレーションしよう． （2）副作用のリスクを考えると集団全員に予防接種を義務付けるのは効果的ではない．感染症の流行を防ぐには，10 万人中少なくとも何%の人が予防接種を受けておくべきかを決定しよう．

図 2　本授業における探究課題「感染症の流行予防」

この探究課題は次のようにして漸化式に定式化される．n 週目における，まだ感染していないが感染する可能性のある人口（感受性人口）を S_n，感染していてかつ感染力のある人口（感染人口）を I_n，病気からの回復による免疫保持者ないし隔離者・死亡者人口（隔離人口）を R_n とする．また総人口は $S_n + I_n + R_n = N$ で一定であるとする．新規感染人口は感受性人口から生じ，また感染人口から新規隔離人口が生じると考えると，様々な仮定をおく必要があるが，次のように連立漸化式に表現できる．

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n - S_n \times (I_n / N) \times 70 \times 0.018 \\ I_{n+1} = I_n + S_n \times (I_n / N) \times 70 \times 0.018 - I_n \\ R_{n+1} = R_n + I_n \end{cases} \quad \cdots(2.1)$$

この漸化式に基づいてシミュレートした結果のグラフが次の図である．

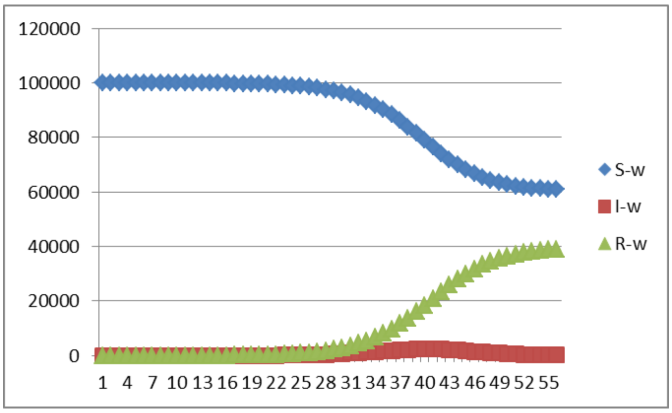


図 3　シミュレーション結果

なお，$S_n + I_n + R_n = N$ より $S_n = N - I_n - R_n$ であり，$R_n = \sum_{k=1}^{n-1} I_k$ であるから，連立漸化式（2.1）において第 2 式の感染者数は

$$I_{n+1} = I_n + (N - \sum_{k=1}^{n} I_k) \times (I_n / N) \times 70 \times 0.018 - I_n$$

と I_n のみで定式化することも当然ながら可能である．

ここで漸化式(2.1)をそれぞれ「週当たりの人口増加数」として見直せば，

$$\begin{cases} S_{n+1} - S_n = S_n \times (I_n / N) \times 70 \times 0.018 \\ I_{n+1} - I_n = S_n \times (I_n / N) \times 70 \times 0.018 - I_n \\ R_{n+1} - R_n = I_n \end{cases} \quad \cdots(2.2)$$

と差分方程式の形になる．そこで「週当たり」という時間間隔を小さくしていき，差分間隔を 1 日したうえで，さらに間隔を 0 に限りなく近づけていくときの極限を考える．ここでは間隔を$\triangle t$<<1 にとり，接触する延べ人数を 10$\triangle t$，感染力を失う人数を $(1/7)\triangle t I(t)$ として，両辺を$\triangle t$ でわり$\triangle t \to 0$ とすると

$$\begin{cases} dS(t)/dt = -S(t) \times (I(t)/N) \times 10 \times 0.018 \\ dI(t)/dt = S \times (I(t)/N) \times 10 \times 0.018 - (1/7)I(t) \\ dR(t)/dt = (1/7)I(t) \end{cases}$$

となる．さらに，流行初期は $S \approx N$ であるとすれば，この第 2 式は

$$dI(t)/dt = N \times (I(t)/N) \times 10 \times 0.018 - (1/7)I(t) \fallingdotseq 0.037 I(t)$$

となり，この微分方程式は $I(0) = 1$ という条件のもと，$I(t) = e^{0.037t}$ と解くことができる．

（2）教材観

感染症の数理モデルである SIR モデルの教材化は，次の三点の理由で本公開授業の趣旨に合致していると考えている．

まず，本探究課題において感染者人口をシミュレーションするにあたっては，感染者人口（I）だけでなく，少なくとも感受性人口（S）を考慮する必要が生ずる．そうすると，感受性人口から感染者人口への移動といったように，感染者人口の単位時間当たりの変化を考える必然性があり，それが何らかの形で表現されることを期待できる．そこでその変化自身に焦点をあて，表現を洗練していくことで，差分方程式・微分方程式が生み出されることを想定できる．

次に，感染病の流行初期を考察することで，線形 1 階微分方程式 $dy/dt = ky$ が生ずることである．この形の微分方程式は，非常に簡潔で解くことも簡単でありながら，いくつかの現象を記述することができるものである．この微分方程式を知っておくこと自体が有効である．そしてそのような微分方程式であるからこそ， $dy/dt = ky$ で記述されるような他の現象の探究を評価課題として課すことで，目標が達成されたかどうかを評価することができる．評価については後述する．

最後に，微分方程式の実用性を実感できる題材であると考えられることである．微分方程式が用いられている実例であり，感染症の流行を防ぐためにその様子を数学的に記述したいという，微分方程式が有効に働くことを実感できる題材であると考える．

（3）本教材の指導計画

微分方程式は，数学Ⅲの検定教科書において最後の方で発展として扱われている．それは「微分方程式を解く」ことまで話題としているからであるが，本時の趣旨は「微分方程式を解く」ことではなく，数学的モデルとしての「微分方程式に表す」ことにある．本教材は，「微分法の応用」の一つとして位置付ける．即ち，数学Ⅲにおける微分法が既習事項である．

本教材は全 5 時間で指導を行う．本時は第 4 時に該当する．第 4 時までに連立漸化式(2.1)あるいは第 2 式だけがつくられ，さらにその式において，流行初期は $S_n \approx N$ であることから $I_{n+1} = 1.26 I_n$ となり，感染者数 I_n は等比数列（離散的指数関数）に従って増加するところまで考察されている想定である．

表 1　本教材の指導計画

時数	生徒の主たる活動	主たる目標
第 1 時	グループによる課題(1)の自力解決	現象を探究する上での仮定を適切に設定することができる．変化の規則性を見抜くことができる．
第 2 時	自力解決の発表・共有	現象を漸化式に定式化し，それを利用してシミュレーションすることができる．
第 3 時	流行初期の変化の考察（離散）	現象にみられる変化を数学的に特徴づけることができる．
第 4 時（本時）	漸化式を差分方程式と見直す 流行初期の変化の考察（連続）	微分方程式を生み出し，現象における変化の状態を記述することができる．
第 5 時	グループによる課題(2)の自力解決と共有	数学的モデル化のプロセスを理解することができる．

（4）数学的モデルとしての微分方程式を生み出す具体的な手立て

本教材に即した具体的な手立てのうち，本時（第 3 時）において主となる二点を次のように設定する．

手立て 3-①：感染者数の週当たりの増加数についてわかることを問う．
目的 3-①：漸化式を見直して差分方程式を生み出すため

予防対策のためのシミュレーションの一環として，流行初期における週当たりの増加数を調べさせる．感染者数ではなく，その増加数についてわかることを問うことによって，週当たりの変化それ自身に目を向けさせる．様々な調べ方が想定されるが，最終的には連立漸化式(2.1)の第 2 式（ただし $S_n \approx N$ ）を根拠として，「週当たりの感染者増加数がその週の感染者数に比例する」ことを見出させたい．

手立て 3-②：1 週間あたりではなくもっと短い時間単位において刻々と変化する感染者の変化を調べられないか問う．
目的 3-②：差分方程式から微分方程式を生み出すため

週ごとの感染者数のシミュレーションに基づいていては，予防対策もあくまで週ごとにしか講ずることができない．そこで，もっと短い時間単位での変化を調べられないかを問い，理想的には限りなく小さな時間単位における感染者数の変化を調べられると良いという意見や変化率を考えるというアイデアが出されることを期待したい．

３．生徒観と学習歴

数学 6α（数学Ⅲ）習熟度別上位クラスに属する生徒たちであり，それなりに力のある生徒たちである．これまで，文脈に埋め込まれた現象を探究する経験を重ねてきており，まずは自力で考える姿勢が十分に身についている．面白い，解いてみたいと思う問題に対しては非常に熱心に問題解決に取り組む．また，授業者が全体に問いを発すると，特に挙手を促さなくても，積極的に発言する生徒が数名見られる．他人の発言や説明に対して真摯に向き合うことができる．さらに，この学年の生徒は探究の振り返りをしっかりと記述できることが特徴である．

なお，対象クラス 15 名中 8 名が，昨年度の 5 月に実施された総合的学習の時間の一環で，計 2 時間，生物個体数の変化をシミュレーションした経験を有している．そこでは数列を利用して，羊の頭数の 1 年あたりの増加数が全体の頭数に比例するという見方（離散マルサスモデル），また，全体の頭数と当該の環境においてまだ生存できる頭数の積に比例するという見方（離散ロジスティックモデル）をした．ただし差分という見方はしていないし，微分は未習であったため全くそうした眼ではみていない．したがってあくまで 1 年あたりの増加数という扱いであり，それを単位時間当たりの変化率とはみていない．この経験が本教材においてどう働くかが未知数である．当該の 8 名をバランスよくグループに振り分けることを考えている．

４．評価の計画

本教材の指導計画に基づく一連の授業を終えたのち，本公開研究会冊子に載せた評価課題「炭素 14 年代測定法」を用いて，生徒個々の「現実の問題を解決するために，数学的モデルとして微分方程式に定式化し，処理し，解釈・評価する」プロセスを評価する．評価規準は次のとおりである．

表 2　評価規準　観点 B. プロセスと振り返り（B1）

0	以下のいずれにも達していない。
1-2	現実の問題を微分方程式に記述している.
3-4	現実の問題を微分方程式に記述し，適切な数学的処理に基づいて結論を導くことができる.
5-6	現実の問題を微分方程式に記述し，適切な数学的処理に基づいて結論を導くことができ，解決過程および結論について振り返り，評価することができる.

なお，本時において生徒たちの集団としての活動の水準が高まったかどうかは，生徒たちのワークシートを回収し，また発言を記録することによって，それらを証拠として評価する.

５．前時までの概要

（1）第 1 時

授業者が問題を提示し，「現在のところで気になる点はありますか」と問うと，いくつかの確認事項が出された．また探究をし始めて最初の方にもいくつかの確認がなされた．それら一つ一つについてクラスとしてどうするかを決めた．以下，確認事項が出された順に，その内容とそれに対してどう対応することにしたかをまとめる.

表 5-1　問題に対する質問とクラスとしての対応

No.	質問	クラスとしての対応
1	潜伏期間は考える？	潜伏期間はなしと考えるか，潜伏期間中も他人にうつすと考える.
2	予防接種受けた人はもう完全にかからないとする？	考えやすくするために 100%予防できるとする.
3	例えば月曜にかかるのか水曜にかかるのかでずれるから 1 日単位で考えたほうが考えやすいのではないか？	1 日単位の変化の方が考えやすいのであればもちろんそれでもよい．各グループに任せる.
4	「流行」とは何か？	シミュレーションしてみてから考えよう.
5	この集団における人口の増減や構成員は変わらないとするんですよね？	変わらないとする．総人口は 10 万 1 人ということになる.
6	1 回接触した人ともう一回接触したりもする？	延べ 70 人はランダムに接触する.
7	最初に入り込んだ感染者はかかってどれくらい？	1 週間うつしつづけるとする.

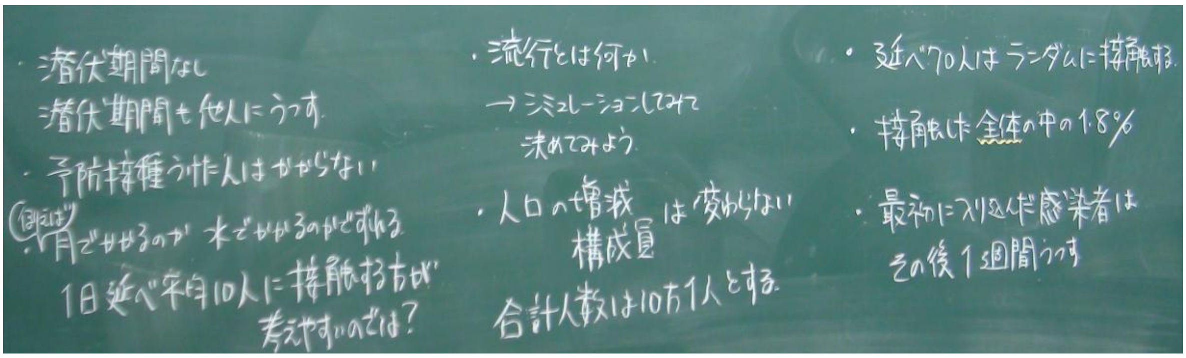


図 5-1　第 1 時の板書

また，質問ではなかったが，問題における「感染者と接触した未感染者のうち 1.8%の人が感染する感染力」の解釈を一個体どうしが接触したときに感染する確率が 1.8%であるとしているグループがあったため，そうではなく接触した中で 1.8%が感染するという割合を意味していることが強調された．板書にはその一文もある．

第 1 時はその後グループごとの自力解決で終えたが，終盤には「数列っぽくなってきたな」「漸化式が」などの発言が各グループでなされていた．実際第 1 時を終えた時点で次のように変化の規則性を表しているグループがみられる．

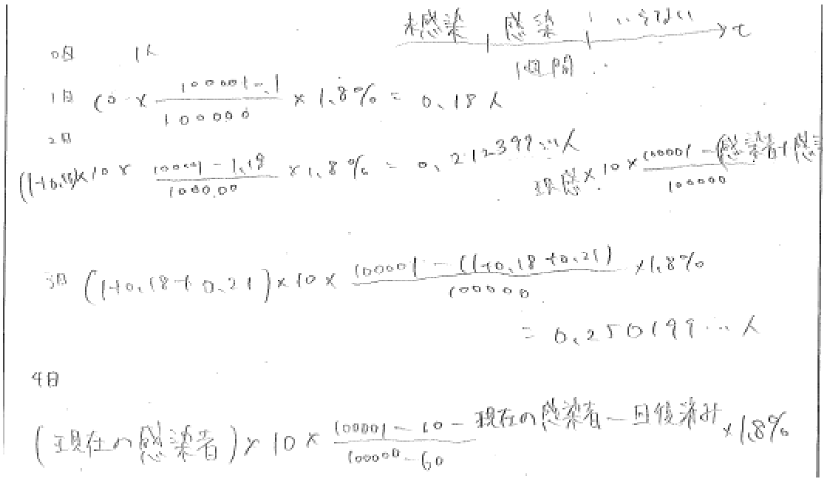


図 5-2　グループ②・生徒 TS の記述

（2）第 2 時

最初の 20 分間で各グループが現在行っていることを板書し，その後全体で共有された．各グループが行っていたことと共有後の行動は以下の通りである．

表 5-2　各グループの自力解決と共有後の行動

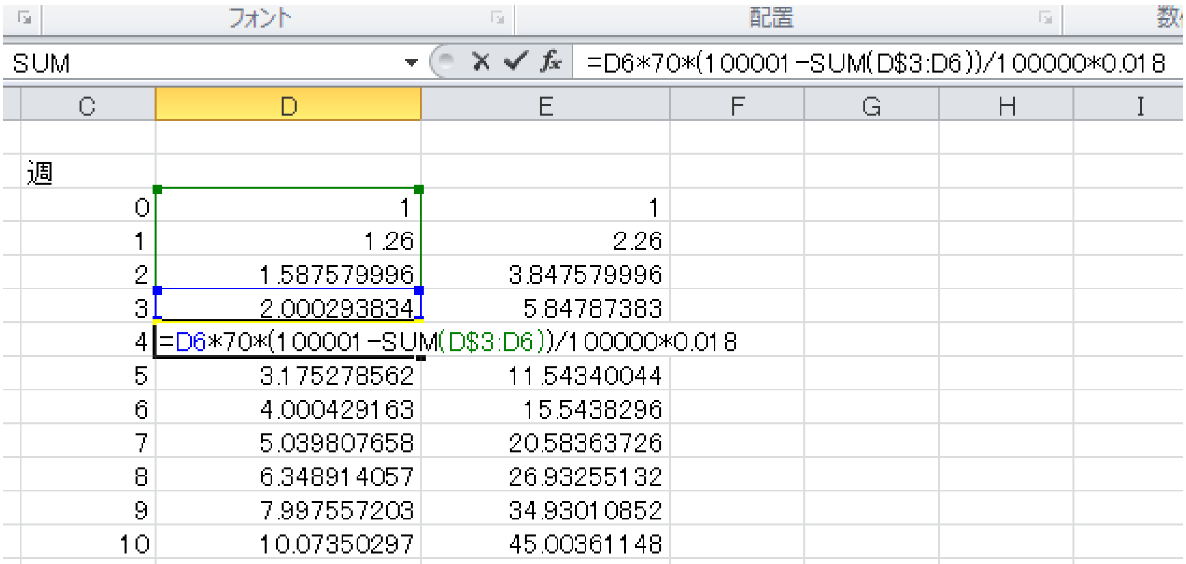
グループ	行動
①	n 週目に感染している人数を a_n として，$a_n = a_{n-1} \times \dfrac{70}{100000-(a_1+a_2+\cdots+a_n)} \times 0.018$ という漸化式に表す．→しかしグループ 2・3 の発表をきいて，グループ②・③の漸化式に変える．
②	k 週目に感染する人数を a_k として n 週目に感染する人数を $a_n = a_{n-1} \times 70 \times \dfrac{100001-\sum_{k=0}^{n-1} a_k}{100000} \times 0.018$ という漸化式に表す．→エクセルでシミュレーションを始める．
③	n 週に感染する人数を a_n とすると n 週で感染 or 免疫を持っている人数は $\sum_{k=1}^{n} a_k$，そうでない人に会う確率 $p_n = \left(1-\dfrac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{100000}\right)$，70 人中持っていない人数は $70p_n$，よって $a_{n+1} = 70p_n \times \dfrac{1.8}{100} \times a_n$
④	1 日ごとの変化を考えたが，7 日区切りで漸化式を考えることにする．
⑤	a＝0.018 として，1 週が終わった直後：70，2 週：$70a \times 70 \times \dfrac{98.2}{100} \times a = (70a)^2 \times (1-a)$，3 週：$(70a \times 70 \times \dfrac{98.2}{100} \times a) \times 70 \times \dfrac{98.4}{100} \times a = (70a)^3 \times (1-a)(1-2a)$，…→しかし第 4 時が始める前に授業者に，グループ②③と同じように全体の人数を考慮すべきであったと伝えに来る．

板書がされるまでの 20 分間で，第 1 時とは解決の方向性を変更したグループが確認される．例えばグループ②は図 5-2 にあるように第 1 時では 1 日ごとの変化を考えていたが，第 2 時では週ごとの変化に戻している．一方でグループ①は第 1 時にはグループ②③と同じような漸化式の形に表現していたが第 2 時では上記のように変えた．しかし②③の発表を聞いて誤りであったと述べた．

それぞれが発表を終えて（グループ④⑤①②③の順で発表された），グループ②③が表現した漸化式が受け入れられ，漸化式でとらえればよさそうであることが共有された．残り 10 分間では，漸化式に表現していなかったグループ④⑤は②③が表現した漸化式を解釈し，②③は自分らが表現した漸化式を用いてエクセルでシミュレーションを進めた．

（3）第 3 時

第 3 時のはじめには，グループ②③が表現した漸化式（最初を 0 週で考えるのか 1 週で考えるのかでずれがあるが）に則ることが確認され，第 2 時までに漸化式を用いてエクセルで数値計算を行い感染者数が最大になる週を見つけたりしていたグループ②が，全体の場で，PC を用いてやり方を発表した．そのときグループ②は総感染者数まで求めた．



週	D	E
0	1	1
1	1.26	2.26
2	1.587579996	3.847579996
3	2.000293834	5.84787383
4	=D6*70*(100001-SUM(D$3:D6))/100000*0.018	
5	3.175278562	11.54340044
6	4.000429163	15.5438296
7	5.039807658	20.58363726
8	6.348914057	26.93255132
9	7.997557203	34.93010852
10	10.07350297	45.00361148

図 5-3　グループ②が作成した表計算の一部

他のグループも同様の活動を行った上で，感染者数と総感染者数をグラフにした．PC を用いて全体の場でグラフにした生徒は次の図にした．グラフが連続であるように見える．

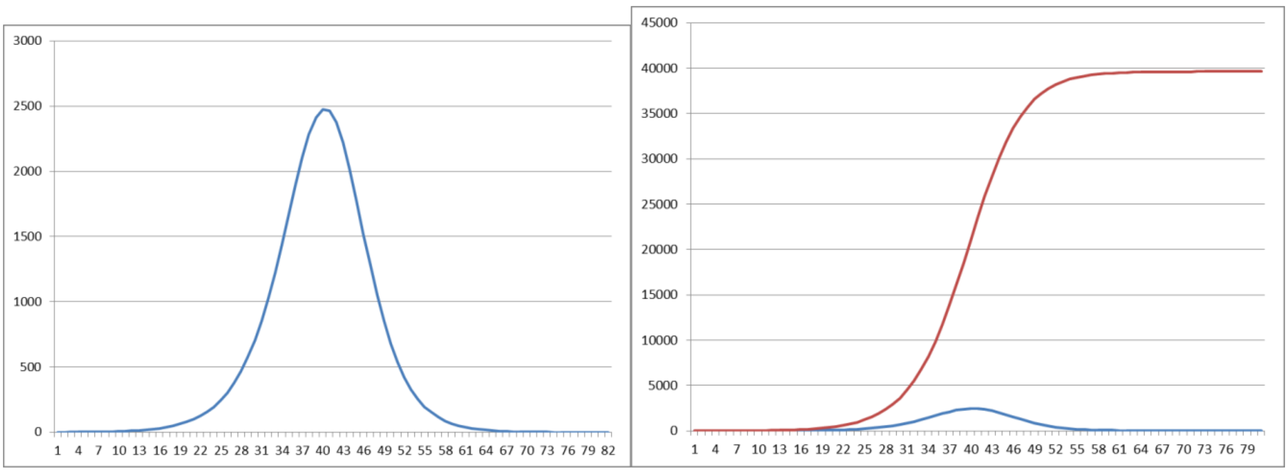


図 5-4　感染者数のシミュレーション（左）と感染者数・総感染者数のシミュレーション

グラフを作成した生徒に確認すると折れ線グラフを用いたとのことであった．それを受けて，いま求めた値は週ごとであることが改めて確認された．その後授業者によって東京都のインフルエンザ患者報告数（週ごと）のデータとそのグラフが提示され，様子が同様であることが確認された．

次に授業者から，感染者数が増加している流行初期の部分が問題であること，その部分の変化を数学的に特徴づけられないかが問われた．すぐに「指数関数」といったつぶやきが聞こえた．グループの活動では増加部分を取り出して散布図にし，指数関数で近似する活動などが行われた．残り 5 分になって全体の場で共有が始められ，授業者がどんな変化であるかと問うたところ「指数関数」という発言がされた．それに対し授業者が，いまは数列で考えているので，それは数列でいうと何かと問うと，「等比数列」と発言された．その上で授業者が「では等比数列をみなすことが妥当であることの根拠は？」と問うた．これに対し，第 2 時においてグループ③で漸化式を発表した生徒は「でも公比が変わっていっちゃう」と発言した．しかしグループ⑤の生徒が，「でも初期の段階では感染者数が 10 万人に対して少ないから，漸化式にある $\dfrac{100001-\sum_{k=0}^{n} a_k}{100000}$ の部分が 1 とみなせる限り（範囲）では，漸化式が単純に a_n の定数倍が a_{n+1} となるから等比数列」であることを発言した．その発言は納得され受け入れられた様子であった．ここまでで第 3 時が終わった．

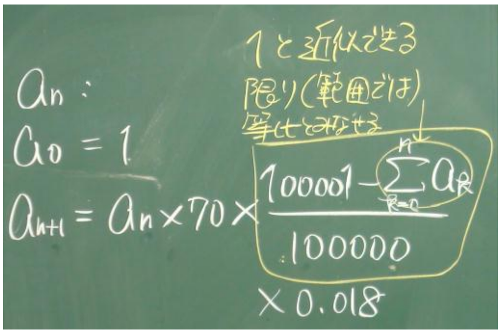


図 5-5　漸化式から流行初期が等比数列とみなせることが確認された時の板書

（4）前時までの概要・まとめ

- グループごとの自力解決では全グループが数列ととらえ，さらに 5 グループ中 4 グループが漸化式に言及した．結果として，漸化式 $a_{n+1} = a_n \times 70 \times \dfrac{100001-\sum_{k=0}^{n} a_k}{100000} \times 0.018$ が用いられている．
- 初期値はグループ②によって n＝0 から始められ，$a_0 = 1$ であるとされている．
- この漸化式と初期値を用いて，エクセルでシミュレーションが行われた．39 週でピークを迎えることや，最終的に約 4 万人が感染してしまうことが確認された．
- 感染者数が増加している段階の変化は等比数列とみなせることが漸化式に基づいて説明された．漸化式にある $\dfrac{100001-\sum_{k=0}^{n} a_k}{100000}$ を 1 と近似できる限りは等比数列とみなせるという説明であった．

※留意点

- どの曜日で感染するかわからないので 1 日単位で考えたほうがよいという意見が既に出されている．
- “a_n”の意味が完全に明示されていない（n 週目の感染者数なのか，n 週後の感染者数なのか）

６．本時案

（1）本時の目標

数学的モデルとしての微分方程式を生み出し，現象における変化の状態を微分方程式に定式化する．

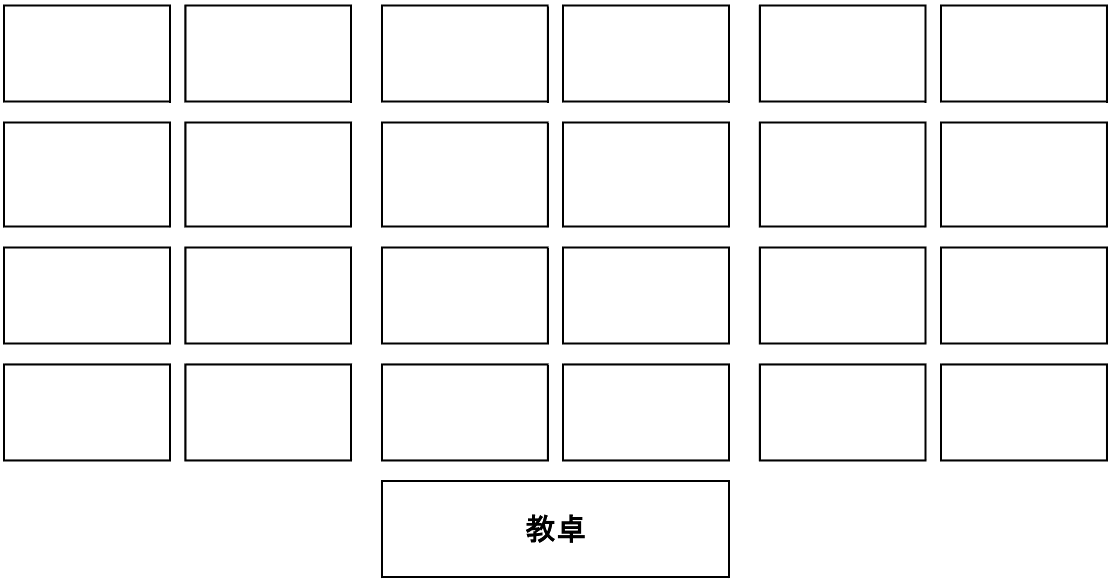
（2）本時の展開　※T は教師の問い，S は生徒の反応，●は状況に応じた手立て

時間	指導内容・主な発問と予想される生徒の反応	留意点
5	**１．前時の振り返りと新たな課題提示** T0：前時までに，流行初期における週ごとの感染者数の変化は，等比数列（離散的指数関数）になることがわかった． **T1：流行を予防するには，週当たりの感染者増加数を小さくする必要がある．いまのシミュレーションの流行初期において，週当たりの感染者増加数についてわかることは何だろうか．**	週当たりの増加数を調べる必要性がわかるように問う．
10	**２．グループでの自力解決** S1-1：数値で分析…週当たりの増加数を具体的に求め，その差や比を調べる． S1-2：グラフで分析…週当たりの増加数を具体的に求め，プロットしたグラフの形状から変化を予想する． S1-3：一般項で分析…一般項 $I_n = 1.26^n$ を用いて $I_{n+1} - I_n$ をつくる． S1-4：漸化式で分析… $I_{n+1} = 1.26 I_n$ …①を用いて $I_{n+1} - I_n$ をつくる． ●S1-4 の反応が現れない時は，漸化式を用いることはできないか問う S1-5：等比数列で変化する／感染者数の変化と似ている S1-6：その週の感染者数の 0.26 倍である S1-7：その週の感染者数に比例する（$I_{n+1} - I_n = 0.26 I_n$ …②） ●S1-7 の反応が現れない時は，増加数（$I_{n+1} - I_n$）と感染者数（I_n）の関数関係を問う．	ある程度時間が経過したところで，S1-4（いなければ S1-3）のように式で解釈しているグループを必ず指名し，わかることをきく．
10	**３．練り上げ** T2：「週当たりの増加数がその週の感染者数に比例する」ということは，その週の感染者数が 2 倍，3 倍，…になれば感染者増加数はどうなるか． S2：2 倍，3 倍，…になる． T3：逆に，週当たりの増加数がその週の感染者数に比例するという仮定をおくとき，I_n が等比数列になることを確かめよう． S3：$I_{n+1} - I_n = aI_n$ ならば $I_{n+1} = (1+a)I_n$ であるから等比数列． **T4：いまの問題状況において「週当たりの増加数がその週の感染者数に比例する」という仮定をおけば，前時で求めた I_n が等比数列になるという結果を得ることができる．**	週当たりの増加数がその週始めの感染者数に比例するという意味を解釈する． I_n ではなく週当たりの増加数 $I_{n+1} - I_n$ に着目した仮定であること，それをおくことで I_n の変化を調べられることを強調する．
20	**４．さらなる探究** **T5：１週間ごとの感染者数の変化を調べてきたが，予防策をできるだけ正確にするため，刻々と変化する感染者数の変化を調べたい．どうしたらよいだろうか．**	グラフが点プロットであり間が空いていることを

	S5：「1 週間ごと」をもっと短い時間にして調べる．	強調する．
	T6：理想的にはどんな時間単位で調べられると良いだろうか？ S6-1：瞬間の感染者数がわかればグラフが連続になる． S6-2：人数の変化なのに瞬間まで考える必要があるのか？ S6-3：実際は 1 日当たりの感染者数しかわからないと思う． S6-4：1 日当たりの感染者数がわかれば十分だと思う．	
	●「連続」や「瞬間」というキーワードが発言されないときは，I_n が n 週の関数であり離散的であったことを振り返り，理想的には時間 t の関数と考えることができないかを問う．	瞬間的な変化はあくまでも理想的な状況であることを確認する．
	T7: まず, 流行初期における 1 日当たりの感染者数の変化を調べよう．漸化式はどう変更されるだろうか.	指数関数になることが予想される．
	S7-1：接触回数は 10 回でいいと思う．	条件を確認する．
	S7-2：感染する未感染者の割合は 1.8%から変わらないと思う． S7-3：今度は第 n 日時点での感染者数を I_n とすると， $I_{n+1} = I_n + N \times \frac{I_n}{N} \times 10 \times 0.018 - (1/7) I_n \fallingdotseq 1.037 I_n \cdots ③$	「1 日当たりの感染者増加数もまた，その日の感染者数に比例する」としていることを確認する．
	T8：さらに，時間 t の関数 $I(t)$ として連続的な変化を調べるにはどうしたらいいだろうか.	
	S8-1：1 日単位ではなくてもっと間隔を小さくすればいい． S8-2：1 時間単位も考えられると思う． S8-3 : 間隔を h や⊿t で表して 0 に限りなく近づければいいのでは. S8-4：変化率（瞬間的な感染者増加数）がその時点での感染者数に比例するとみればよいのではないか.	議論が進まないようであれば一度グループで議論する時間を確保する．
	●S8-3 の反応が現れないときは，間隔（増分）を限りなく 0 に近づける経験を既にしてきていること，それをどのように表現してきたかを問う．	S8-4 の反応が現れるのが理想であるが，現れない場合は S8-3 のような反応を活かして進める．
	T9：漸化式③をもとにして，⊿t<<1 としたとき，$I(t+⊿t)$ と $I(t)$ の関係を式に表し，⊿t→0 を考えてみよう． S9-1：$I(t+⊿t) = I(t) + N \times \frac{I(t)}{N} \times 10⊿t \times 0.018 - (1/7)⊿t I(t) \cdots ④$ $I(t)$ を移項して⊿t で両辺をわって⊿t→0 とすると， $dI(t)/dt = 0.037 I(t)$ S9-2：変化率（瞬間的な感染者増加数）もまた，その時点での感染者数に比例すると仮定すると，$dI(t)/dt = 0.037 I(t)$ ●S9-1 の反応が現れない時，③式の左辺 $I_{n+1} - I_n$ を，1 日間の平均変化率と見直し，瞬間的な増加数ではどうなるかを問う． ●上記 T8 に対して S8-4 の反応が現れずとも，④式に対しては S9-2 のような解釈を必ず行う．	1 日単位の漸化式ではなく 1 時間単位の漸化式に表現したグループがあれば, それに対して⊿t を考えてもよい.

5	**５．まとめと次時の課題** T9 :「感染者数の変化率がその時点での感染者数に比例する」という仮定を数学的に表現すると，$dI(t)/dt = aI(t)$ である．この問題状況では $dI(t)/dt = 0.037I(t)$ と表現することができた．つまり $I(t)$ は微分すると自分自身の（約）0.037 倍になる関数である．次の時間はこの等式を満たす関数を求めよう．	「微分方程式」と名付けるのは一連の探究を終える次時に行う．

７．座席表



本稿の引用・参考文献

稲葉寿．（2003）．インフルエンザ流行－数理モデル．
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~inaba/inaba2003_rinshou.pdf（平成 26 年 6 月 20 日最終確認）

瀬野裕美.（2008）．個体群動態の数理モデリング序論．*シリーズ数理生物学入門 巻 1 「数」の数理生物学*．（日本数理生物学会編，瀬野裕美 責任編集）pp.1-43.共立出版.

瀬野裕美.（2009）．感染症個体群動態に関する時間離散モデルについての考察．*京都大学数理解析研究所講究録*． Vol.1663，pp20-29，2009.

瀬野裕美.（2011）．離散型 Kermack-McKendrick SIR モデルの特性．*京都大学数理解析研究所講究録*. Vol.1757，pp37-43.

西浦博・稲葉寿．（2006）．感染症流行の予測：感染症数理モデルにおける定量的課題．*統計数理*．第 54 巻第 2 号．pp.461-480.

西浦博．（2014）．あなたと私の予防接種の駆け引き．*数学セミナー*．2014 年 4 月号．pp.69-75.

D.バージェス，M.ボリー著．垣田高夫ほか訳（1990）．微分方程式で数学モデルを作ろう．日本評論社

M.ブラウン著．一楽重雄ほか訳．（2001）*微分方程式　上・下　その数学と応用*．シュプリンガーフェアラーク東京

ジェームズ.D.マレー著．三村昌泰総監修（2014）．*マレー数理生物学入門*．丸善出版.