東京学芸大学附属国際中等教育学校
令和元(2019)年度　授業研究会

5 年生　SS 物理基礎×SS 数学 II

教科横断的な視点を取り入れた数学と理科の授業

学習指導案

SS 物理基礎　西村 塁太
SS 数学 II　小林 廉

教科横断的な視点を取り入れた理科と数学の授業【第１時：物理基礎】
―運動学－

日時　2019 年 11 月 22 日（金曜日）13:20-14:10
対象　東京学芸大学附属国際中等教育学校 5 年 1・2 組
　　30 名（男子 13 名，女子 17 名）
授業者　教諭　西村　塁太
単元名　力と運動

１．本授業研究における「問い」

物理基礎「運動の表し方」と数学Ⅱ「微分・積分の考え」を関連させる際，概念「変化」についての理解が深まるとともに，知の転用可能性が実感されるためには，どんな授業を実現すべきか.

今年度，物理基礎における運動学の授業は，４月にすでに終えているが，カリキュラム・マネジメントの視点から５年生（高等学校 2 年生）の授業を対象とした教科横断的授業を模索していく中で，数学と物理で上記のテーマでの授業実践に臨むこととなった。公開授業を受ける生徒は，公開授業の 1 時間限定で運動学の授業を行うことになっている。

本「力と運動」単元の前半で扱われる「運動の表し方」では，変位や速度，加速度といった物理量の定義と，それらの時間変化を表すグラフを用いて，様々な物体の運動をどのように表し，その特徴をどのように見出すのかといった方法論を学ぶ。例えば，$x-t$グラフや$v-t$グラフの傾きが速度や加速度を，$a-t$グラフや$v-t$グラフの面積が速度変化や変位をそれぞれ表すといったことである。特にグラフについては，このような傾きや面積に注目して分析する方法は，今後の物理基礎そして物理の学習で何度も登場してくる考え方であるため，その考え方を初めて扱う本単元は，非常に重要であると考えられる。

グラフの傾きや面積を求め，他の物理量とのつながりを見出す学習は，当然のことだが，数学の微分・積分の考え方そのものであろう。しかし，それを露わに本文中で述べた物理基礎の教科書はなく，多くが後方のページに付録として簡単な扱いを掲載しているに留まっている。学習指導要領上でも，微分・積分といった言葉は登場しない。物理基礎で，微分・積分を用いて運動学を学ぶ必要はないのである。授業者もこれまで，ほぼすべての高校 1・2 年生が履修する物理基礎という科目においては，生徒の発達段階の実態を踏まえると，あえて数学の微分・積分を露わに持ち出し，関連付けて教えるメリットを感じていなかった。しかし同時に，これだけ密接に内容的に関わり合っている数学の微分・積分と，物理基礎の運動学の学習を教科横断的に教えることができれば，互いにメリットがあるのではないかと考えていたところではある。

このような視点に立ち，5 年生研究グループの数学科・小林教諭と議論を重ねていった。議論の焦点としては，①数学と物理で異なる現実事象を取り上げ，それぞれが独立で授業をしているように見えるが，実は問題解決のためのアイディアを共有しており，教科間で知を転用できることに生徒が気付くことを目指した展開，②数学と物理で同じ現実事象を取り上げ，実験観察によって規則性を見出し，数学化するところまでを物理が担当し，その後の抽象化・一般化を数学が担当する展開の大まかに二つのパターンが出てきた。本公開授業では，新学習指導要領で求められている教科横断的な授業の実践をより現実的に検討することも視野に入れて，①の展開での授業実践を行うこととした。

２．単元の目標と指導計画

(1)単元の目標

身の回りの運動に関する探究を通して，力と運動の本質を理解するとともに，物理量の変化を読み取る見方・考え方の獲得と，力学実験の基本的な技能の習得，そして，それらを活用することのできる探究に関わる資質・能力を育成する。

(2)単元の指導計画

次	教材	指導内容	時数
1	運動学		
	人の歩行運動をグラフで表そう	位置，変位，速さ，速度 $x-t$グラフ，$v-t$グラフ，距離センサー	1
	台車の運動の記録とグラフ化	加速度，等加速度直線運動，$a-t$グラフ 記録タイマー，記録テープ	1
	いろいろな落下運動の特徴は？ ＜W 棟 3 階からの自由落下：本時＞	重力加速度	4
2	運動の法則		
	ゴムひもに引かれた台車の運動	力と加速度の間の定性的関係	1
	力と質量と加速度の間の定量的関係は？ 【総括的評価課題　規準 C, D, E】	運動の第一・第二法則，運動方程式	3
3	運動方程式の活用		
	落下物体にはたらく重力の大きさは？	重力	2
	摩擦力は速さによって変化するか？	動摩擦力	2
	木片はどこまで滑って止まるか？	二体物体の運動	2
	二物体の衝突の際の力は？	運動の第三法則，静力学	1

物理基礎の力学単元において授業者が目標としているのは，生徒に運動の法則の概念を獲得させることである。単元の前半（1 次）で，物体の運動の観察を通して加速度を導入し，傾きや面積によるグラフ相互の関係を押さえながら運動の表し方を学ぶ。そして，それらを用いて力と運動の関係について定量的に探究し，運動方程式を獲得する（2 次）。その後は，運動方程式を様々な運動に適用して予想し，実験によって検証することで，運動方程式が確かに成立すると考える合理性を理解させる展開を想定している（3 次）。

本校での物理基礎は，科目名を「SS 物理基礎」としている。これは，SSH[1)]対象科目として，国際バカロレア IB のミドル・イヤーズ・プログラム MYP[2)]と，ディプロマ・プログラム DP[3)]，そして，日本の学習指導要領 [4)]を融合し，探究的な学習を重視した独自の理数探究プログラム開発の一環として実施している科目だからである。SS 科目の評価は，MYP，DP を参考に，本校独自に設定した評価規準（基準）に基づき，ルーブリック [5)]を使用した観点別評価で行っている [6)]。例えば上表の【総括的評価課題　規準 C，D，E】とは，「力と質量と加速度の間の定量的関係は？」といった総括的評価課題を実施し，規準 C：実験観察の技能，規準 D：データ処理，規準 E：評価といった観点でルーブリックによる評価を行った，といったことを意味する。SS 理科科目では，規準 B：探究が設定されていることから，生徒が独力による科学的探究を必ず年間に一度は実施しなければならないこととなっている。上記総括的評価課題でも，仮説の設定から，検証計画の立案，実験の実施，データ処理，考察，レポートの作成までを，生徒が独力で行った探究となっている [6)]。

４．本時の目標と教材

自由落下運動が等加速度直線運動であることや，$v-t$グラフの面積が距離を表すことを活用して，物体の運動に関する問題解決に取り組んでいる。

＜本時の目標と展開＞

本時は，おもりをＷ棟３階の非常階段から中庭へ自由落下させ，その運動を記録タイマー，記録テープで測定して得られたデータを用いて，おもりの落下距離を算出するという課題に取り組む。Ｗ棟３階からの自由落下を測定した実際のデータと，自由落下運動の特徴から，おもりの$v-t$グラフを推測するとともに，$v-t$グラフから落下距離を求める方法について生徒同士で議論し，実際に算出する。最後に，$v-t$グラフの面積が，なぜ落下距離を表すのかという点について議論することを通して，数学の授業で本公開授業の直前まで学習していた区分求積法とのつながりを見出すとともに，公開授業２の微分・積分に関する数学の授業への橋渡しとする予定である。

物理基礎としては，数学の区分求積法および微分・積分の授業に合わせて運動学の授業を行うことで，生徒が物理量の大きさではなく変化に注目することや，グラフの傾きや面積の意味を解釈することを助けるものと思われる。特に，本公開授業の後半で議論する予定である，速度が変化するときの$v-t$グラフの面積が変位を表すことについては，授業者は非常に重要であることはわかっていても，これまでうまく授業を展開できていなかった部分であるため，数学との連携を通して，生徒にとって理解しやすい授業の実践とできないかと考えている。

物理基礎で，実際の実験の測定値で作成された$x-t$グラフの傾きが平均の速度と一致することや，$v-t$グラフの面積が変位と一致することを示すことは，数学の学習にとっても，原始関数と導関数を微分と積分で行き来できることの実感を持つことに役立つと思われる。

＜本時の教材＞

本時は，Ｗ棟３階の非常階段からおもりを自由落下させて取得した記録テープのデータを扱う。記録タイマーは交流 50Hz のものを使用するので，１秒間あたり 50 回打点する。つまり，ある点から次の点までにかかった時間が 1/50 s ということである。本時では，前後のデータが失われ，５打点ごと（0.1秒）に切った記録テープが４枚だけ手元に残っているという想定で授業を始める（落下にかかった時間はストップウォッチで測定してある）。運動学の知識を活用することで，$v-t$グラフを描き，その面積を求めることで，落下距離が求められることに気づき，実際に計算してみることになる。「もう一度測定し直せば…」といった意見も生徒から出てきそうではあるが，わざわざもう一度測定し直さなくても，この４枚のテープからＷ棟３階の非常階段の高さを求めることはできて，その方が簡単であるといった投げ掛けになろうかと思う。

授業の後半では，多くの生徒が暗記的に覚えているであろう「$v-t$グラフの面積が移動距離を表す」ことを追及していく。距離は，速さと時間の積で求められることと，数学の本公開授業の直前の授業で区分求積法について扱っていることとを組み合わせ，生徒が自分で説明できるようになってほしいと考える。速度が変化する運動でも$v-t$グラフの面積が距離を表すことは，物理基礎の授業だけではなかなか理解することは難しくても，数学の区分求積法で学んだこととつながりを持たせることで，理解しやすいものとなると考えている。

５．本時案

（1）本時の目標

自由落下運動が等加速度直線運動であることや，$v-t$グラフの面積が距離を表すことを活用して，物体の運動に関する問題解決に取り組んでいる。

（2）本時の展開　※T は教師の問い，S は生徒の反応，●が主な手立て

時間	指導内容・主な発問と予想される生徒の反応	留意点
15	<u>問題提示</u> T1：先日，授業で使おうと思い，W 棟 3 階の非常階段から中庭の地面まで，500g のおもりを自由落下させ，その運動の記録を記録タイマーと記録テープで測定する実験を行った。しかし，うっかりして，記録タイマーの一部を紛失してしまった。残った記録テープは，5 打点ごとに切った 4 枚だけで，長さはそれぞれ 0.338m，0.468m，0.556m，9.667m だった。この記録テープは，落下し始めでも落下し終わりでもなく，途中の部分である。落下し始めてから地面に着くまでにかかった時間は，ストップウォッチで 1.24 秒とわかっている。 T2：この記録テープを使って，地面から W 棟 3 階までの高さを調べてほしい。色々な求め方があるだろうが，今日は$v-t$グラフを利用して求めたい。どうすればよいだろうか。	●記録テープを提示する。 ●記録タイマーは 1 秒間に 50 回打点するものを使っていることを説明する。
20	<u>問題解決の方針の検討</u> T3：まず，4 枚の記録テープから$v-t$グラフを描きたいのだが，プロットを一体どこに描けばいいのかわからない。とりあえず，3 種類描いてみたが，どれが適当か，検討してもらえないか。 S：クリッカーで選択肢問題に解答し，周囲の生徒同士で議論する（Peer Instruction）。 S1：自由落下運動は，等加速度直線運動だから，$v-t$グラフは右上がりの直線になるはず。 S2：自由落下だから，初速度は 0 のはず。 T4：ここから落下距離を求めることができるだろうか？ S3：全部で 1.24 秒かかった，ということはわかっているので，$v-t$グラフを 1.24 秒のところまで右側に延長すればいい。 S4：面積を求めればよい。 <u>計算の実行</u> T5：では$v-t$グラフの面積を求めてみて下さい。 S5：$v-t$グラフに近似直線を描き，面積を三角形の面積として計算。 S6：区分求積の方法で計算する。 S7：グラフ用紙の 1 マスあたりの距離を計算し何マスあるか数える。 T6：どのようにして面積を求めたのかまで含めて，結果を報告してください。 S：面積の求め方と結果を報告する。	※Peer Instruction[7)]の基本的な手順 ①選択肢問題提示 ②クリッカーで解答（議論しない） ③解答分布提示 ④周囲の生徒で議論 ⑤2 回目の解答 ⑥教師の解説，場合によっては意見共有 ●選択肢の$v-t$グラフにはプロットだけが並んでいる。近似直線は後から生徒が描き足す。 ●S6 の考え方が出てこなくても，次の展開で発問する。S6 の考え方が出てきたら，その生徒に面積の求め方を紹介してもらう。

20	区分求積について T7：S5~7 で結果はほぼ同じになった。実は，メジャーで高さを測ってみたのだが，その結果とみんなが$v-t$グラフから求めた結果は，ほぼ一致している。 T8：ところで，なぜ$v-t$グラフの面積が距離を表すと言えるのだろうか。特に，S6 の求め方について，考えてみよう。 S8：数学で勉強した。 S9：長方形の底辺は短い時間間隔。高さはその時間の平均速度。だから，長方形の面積（底辺×高さ）は距離を表す。それを足し合わせると，全部の移動距離になる。 T9：長方形の面積の総和が，$v-t$グラフ下の面積に一致しないが，良いのか？ S10：良い。これも数学で勉強した。 S11：時間間隔を限りなく 0 に近づけると，高さがグラフに限りなく近づく。	●実際の高さは 7.5m ●数学で学習した区分求積法とのつながりに気付かせたい。 ●長方形に区切ることで，長方形の面積が物理的に何を意味するようになったのかを，生徒が自分の言葉で説明できるようにしたい。 ●Δtを小さくすると長方形の面積がグラフ下の面積に限りなく近づくことを説明させる。
5	T：授業でわかったこと，まだよくわからないことをまとめてください。[8)] S12：運動の一部分だけがわかっていたとしても，運動の特徴を考えたり，グラフを描いたり，最初と最後の状況を考えることで，全体像を表すことができる。 S13：$v-t$グラフの面積は距離を表す。　…など	

6．本時の評価

自由落下運動が等加速度直線運動であるという知識や，$v-t$グラフを描いたり，その面積を求めたりといった技能を活用することで，物体の運動に関する問題を解決できることを記述している。

【思考・判断・表現】

引用参考文献

1）国立研究開発法人　科学技術振興機構　次世代人材育成事業　スーパーサイエンスハイスクール http://www.jst.go.jp/cpse/ssh/
2）国際バカロレア機構:「MYP：原則から実践へ」, (2018).
3）国際バカロレア機構:「DP：原則から実践へ」, (2014).
4）文部科学省:「中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説　理科編」, (2017).
5）西村塁太: 物理教育 **67-2**, (2019), pp. 113-116.
6）西村塁太: 物理教育通信 **174**, (2019), pp. 95-107.
7）西村塁太: じっきょう理科資料 **8**, (2016), pp. 12-15.
8）西村塁太: 物理教育 **62-1**, (2014), pp. 7-12.

5年生　SS物理基礎　授業研　　　　　組　　　　番　名前

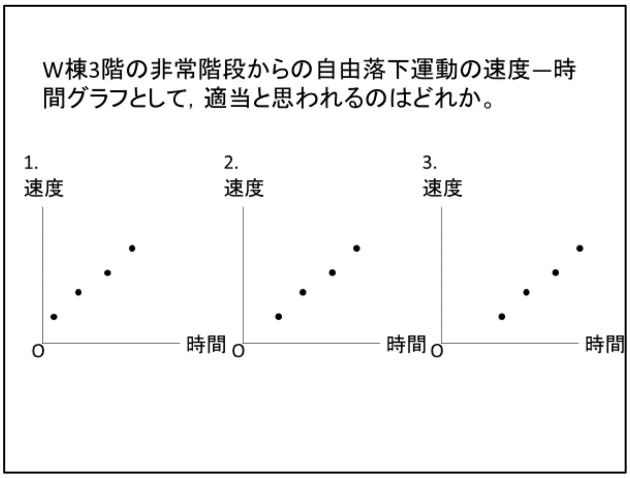
Inquiry Question：中庭からW棟3階の非常階段までの高さは，記録テープから求められるか？

〇課題の概要

先日，授業で使おうと思い，W棟3階の非常階段から中庭の地面まで，500gのおもりを自由落下させ，その運動の記録を記録タイマー（交流 50Hz）と記録テープで測定する実験を行った。しかしうっかりして，記録タイマーの一部を紛失してしまった。この記録テープは，落下し始めたところでも，落下し終わったところでもなく，途中の部分である。落下し始めてから地面に着くまでにかかった時間は，ストップウォッチで測定していたので，1.2秒程であるとわかっている。

この記録テープを使って，地面からW棟3階までの高さを調べられないだろうか。

〇$v-t$グラフ



1回目の解答（　　　　）とその理由

参考になった友達の意見

2回目の解答（　　　　）・結論（　　　　）

＜MEMO＞

$v-t$グラフからW棟3階の非常階段の高さを求めるには，どうすればよいだろうか？

〇計算の実行

・どのように計算したのか，結果はどうなったのか，自分の計算の概要をまとめてください。

・友達が自分とは違う計算方法で求めていたら，それも記録しておきましょう。

〇なぜ

・あなたの考え

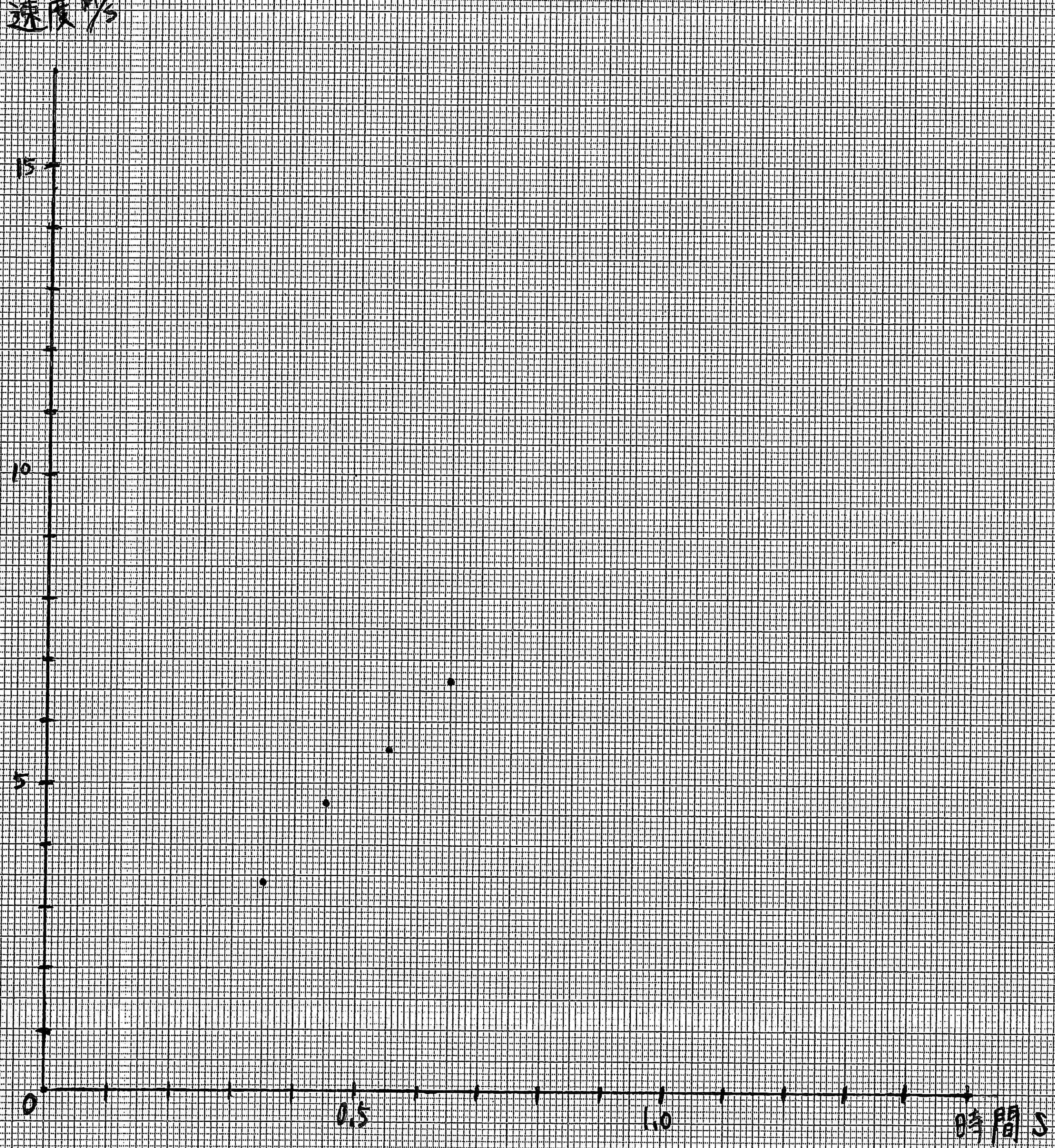
・参考になった友達の考え

〇授業の振り返り

授業でわかったこと

まだよくわからないこと

《W棟3Fからの自由落下のv-tグラフ》



教科横断的な視点を取り入れた理科と数学の授業【第２時：数学Ⅱ】
―極限と微分・積分の考え－

日時　2019 年 11 月 22 日（金曜日）14:30-15:20
対象　東京学芸大学附属国際中等教育学校 5 年 1・2 組
　　　30 名（男子 13 名，女子 17 名）
授業者　教諭　小林　廉
単元名　極限と微分積分の考え

１．本授業研究の背景と「問い」

本授業研究は，本校にて同じ 5 学年で開設している科目「物理基礎」と「数学Ⅱ」において，学習指導要領上の項目でいうと，前者の内容である「運動の表し方」と，後者の内容である「微分・積分の考え」の関連に焦点を当てて実施するものである．

そもそも本校数学科では，「既習の数学を使って事象を探究することを通して新たな数学を創り出していく」プロセスの実現を目指して研究を積み重ねてきている．その一環として開発したのが単元「極限と微分積分の考え」である．その詳細は『TGUISS 数学 5・6』や成田・小林（2019）をご覧いただければと思うが，その単元の一つの特徴は，時間・変位・速度に関わる現象，すなわち「運動」という現象の探究を通して，微分積分学の基本定理の創出を志向している点にある．$v-t$グラフから変位を求めるという物理の内容は，数学的には，ある関数のグラフの下の面積を求めることに帰着する．一方で，$x-t$グラフから瞬間速度を求めるという物理の内容は，ある関数のグラフの接線の傾きを求めることに帰着する．この 2 つの関係を振り返ることで，ある関数$f(x)$のグラフの下の面積を表す関数$S(x)$の導関数は$f(x)$である（$f(x)$の原始関数（の一つが）$S(x)$である）ことを見いだしていくことを意図しているのである．本授業研究はそのうち，$v-t$グラフから距離を求める活動に焦点を当てたものである．

単元「極限と微分積分の考え」では，運動の探究に入る前に，不規則な図形で囲まれた図形の面積を求める活動と，規則的な図形で囲まれた図形の面積を求めることを通して，区分求積法のアイデアを創出し，そのことを通して極限について学習する．このことは，物理基礎の学習内容である，等加速度直線運動での変位は$v-t$グラフ下の面積になること（図 1）の理解を促すはずである．一方，物理基礎では，カリキュラム上，数学科で区分求積法と極限を学習する前に図 1 について学習することになっており，図 1 の意味に深く立ち入ることは難しい．そこで，まず，数学科が区分求積法と極限を終えたタイミングで，物理基礎として図 1 の状況を振り返り，その意味を理解しなおすことを考えた．それが本授業研究における物理基礎の授業の趣旨である．この授業によって，「$v-t$グラフから変位を求めるには，ある時刻までの$v-t$グラフ下の面積を求めればよい」ことの意味理解がなされるはずである．

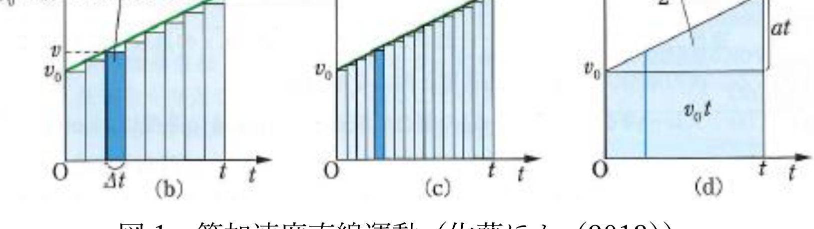


図 1　等加速度直線運動（佐藤ほか（2013））

次に，その授業を受けて数学科としては，次の２点を目標とした授業をすべきであると考える．

第 1 に，ある関数$f(x)$のグラフ下の面積もxの関数（$S(x)$）であることの理解を促すことである．本授業研究における物理基礎の授業では，求める変位は決まった時間に動いたものであるため，変位を時間の関数ととらえる必要はない．しかし微分積分学の基本定理の創出のためには，面積を関数$S(x)$としてとらえておくことが不可欠である．そのための礎として，変位が時間の関数であることの実感を促すことで，面積が関数であることの理解を促す必要がある．

第２に，関数の変化率がわかれば，その関数の大域的変化を記述できることへと抽象化を図ることである．$v-t$グラフの下の面積を時刻tの関数としてとらえて位置の変化を記述することは，数学的には，ある関数の変化率を表すグラフすなわち導関数のグラフから，その下の面積を求めることで，もとの関数（原始関数）の変化を記述していることにあたる．そう抽象化していくことで，様々な事象の探究に適用できる「変化をとらえる手法」の学習となることを期待できる．もちろん，「運動の表し方」に対する見方が変容することも期待できる．物理基礎の検定教科書には例えば図２のような$a-t$グラフ，$v-t$グラフ，$x-t$グラフの関係が載っている．「ある関数の導関数のグラフから，その下の面積を求めることで，もとの関数（原始関数）の変化を記述している」という見方を獲得した後は，この図もその見方でとらえなおせることを期待できる．

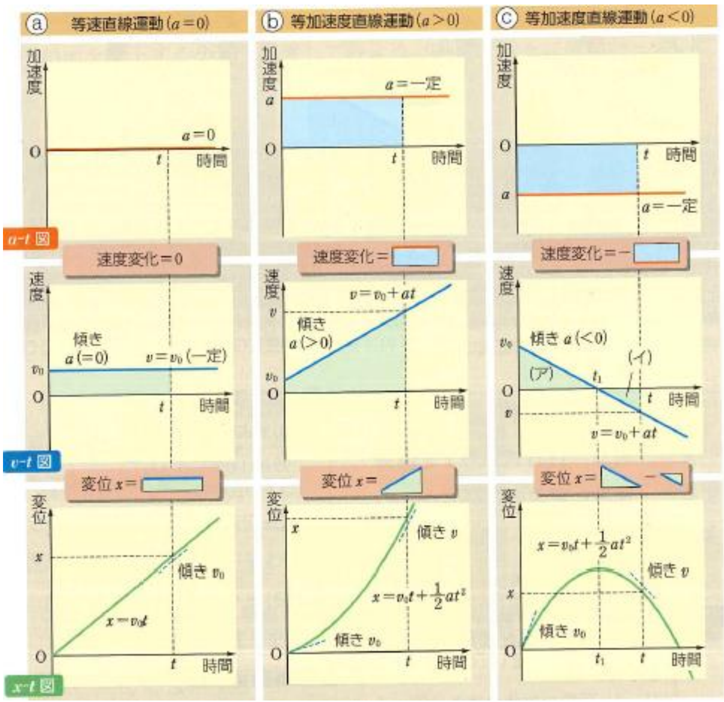


図２　等速直線運動と等加速度直線運動のグラフ（国友ほか（2017））

ただし，数学Ⅱとしては変化率については未習である．本時でその概念を創り出し，それを求める必然性の実感を促した上で，次時以降，物理基礎での瞬間速度の学習を関連させながら微分することの学習へとつなげていく予定である．

以上の背景を踏まえ，本授業研究における数学科としての問いを次のように設定する．

「ある関数$f(x)$のグラフ下の面積もxの関数（$S(x)$）であることの理解を促すこと」，および「関数の変化率がわかれば，その関数の大域的変化を記述できることへと抽象化を図ること」のためには，どんな教材を用いて，どんな議論（練り上げ）を実現すべきか？それは，生徒の認識の実態からみて，適切だったか？

２．単元の目標と指導計画

先に，本時の位置づけと既習事項を明確にするために，単元の目標と指導計画を記しておく．

(1)単元の目標

【知識及び技能】極限概念を理解するとともに，それをもとにして微分の考え，積分の考えを理解する．

【思考力，判断力，表現力等】微分することと積分することの関係について考察する．また，その関係や微分の考え，積分の考えを用いて事象を考察する．

【学びに向かう力，人間性等】問題解決の過程を振り返って微分することと積分することの関係について考察を深める態度，さらにそのよさを認識し活用しようとする態度を養う．

(2)単元の指導計画

探究	教材	指導内容	時数
1 節　近似と極限			
探究 1	島の面積を求めよう	内側近似，外側近似，誤差の限界	4
探究 2	放物線下の面積は？	区分求積法	6
2 節　導関数と原始関数			
探究 1	落下距離の変化を調べよう **【本時】**	時間と速度の関係を表すグラフから時間と変位の関係を表すグラフを求めることは，ある関数のグラフ下の面積を表す関数を求めることに帰着すること．	3
探究 2	瞬間の速さはどれくらい？	時間と変位の関係を表すグラフから時間と速度の関係を表すグラフを求めることは，ある関数のグラフから，その各点における接線の傾きを表す関数を求めることに帰着すること．	3
探究 3	接線の傾きと面積の関係は？	導関数と原始関数 微分積分学の基本定理(Ⅰ)	3
3 節　微分と積分			
探究 1	面積を求める計算方法について考察しよう	x^nの導関数，導関数の性質 定積分 微分積分学の基本定理(Ⅱ)	8
探究 2	$f(x)$が負の場合にも基本定理Ⅱは成り立つ？	定積分の性質 不定積分	8
探究 3	箱の容積を最大にする折り方は？	微分係数 極大・極小	8

なお，本授業研究では，上記 2 節の探究 1 と探究 2 を，『TGUISS 数学 5・6』にある「極限と微分・積分の考え」から入れ替えている．このことによる数学の体系上の問題は起きない想定である．入れ替えた意図としては，1 節ではあくまで面積そのものを求めるために創り出してきた長方形分割を，2 節では運動における速度と位置の関係について考察するために用いるという配列を重視したことがある．

３．本時の教材と手立て

（1）教材

本時の教材として，「時間－速度グラフから，時間－位置の関係を表すグラフ[1]を作成すること」を課すこととする．具体的には以下の通りである．なお，グラフの形や文脈についてはスチュワート（2017）を参考にしている．また，ある関数のグラフを時間－距離のグラフと見立てて時間－位置グラフを作成する先行実践として磯田（2015）がある．

次の図は，車がブレーキをかけはじめてからの，時間と速度の関係を表したものである．

ブレーキをかけはじめてから止まるまで，車の位置はどのように変化するだろうか？時間と位置の関係をグラフに表してみよう．ブレーキをかけ始めたときの位置を 0m とする．

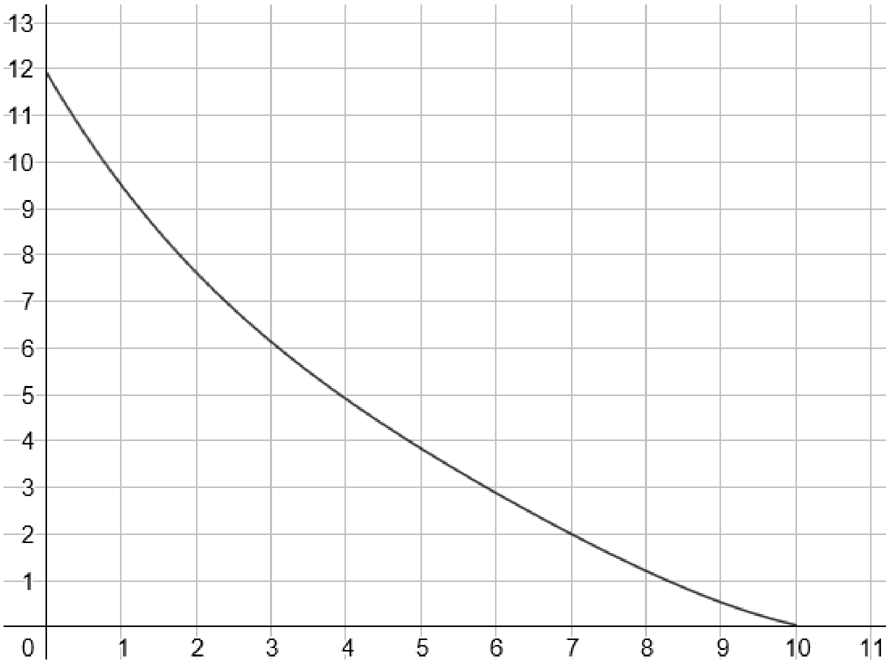


図３　本時で扱う時間と速度の関係を表すグラフ

生徒の活動として，上記グラフの下の面積をある単位時間（例えば１秒）ごとに長方形分割して一つ一つ求めていくことで，その単位時間ごとの変位を決めていくことを想定する．ここに，本授業研究における物理基礎の授業内容が活きてくる．このとき時間－位置グラフを描く座標平面は，上記のグラフとx座標が揃うように縦に並べておくことで，時間－速度グラフとの対応関係を見いだせるようにする．

以上の教材を用いる理由は以下の３点である．

第１に，時間－速度グラフから時間－位置グラフを作成していくことで，時間－速度グラフ下の区間$[0, x]$における面積がxの関数であることの実感の促進を期待できるからである．そのことによって，「ある関数$f(x)$のグラフ下の面積もxの関数（$S(x)$）であることの理解を促すこと」という目標を達成する．

第２に，時間－速度グラフから時間－位置グラフを作成していくために，位置を表す関数の平均変化

[1] これまでは$v-t$グラフ，$x-t$グラフと記していたが，一般に関数について議論する際には独立変数にxを用いるため”x”の意味が混在してしまう．そこで３章以降は$v-t$グラフ，$x-t$グラフという表記を避ける．

率（生徒の言葉ではまだ「変化の割合」）を時間－速度グラフから決めていることの実感の促進を期待できるからである．単位時間ごとの変位を表す点をとっていく一つの方法として，長方形の横幅分だけx軸方向に進み，長方形の面積をy座標に加えていくことが考えられる．これはある点から次の点への平均変化率を決めて次の点を取っていっていることに他ならない．そして，横幅を限りなく 0 に近づけていけば長方形の面積の総和が時間－速度グラフ下の面積になることは既習であるから，そのグラフにおいて横幅を限りなく 0 に近づけていくとより正確な時間－位置グラフを作成できることはイメージできると考える．そこでは，変化率を決めていることになる．

第 3 に，これは第 2 の点と関連するが，時間－速度グラフ下の長方形の面積の累積によって時間－位置グラフができていくことの実感の促進を期待できるからである．第 2 で述べた点は，時間－位置グラフにおける隣り合う 2 点に目を向けた局所的な見方であり，第 3 で述べた点は，時間 0 から時間xまでの全体に目を向けた大域的な見方である．この 2 つの見方そのものを明確にすることで，「関数の変化率がわかれば，その関数の大域的変化を記述できること」への抽象化を図るという目標を達成する．

（2）手立て

本時の手立てとしては，主に以下の 2 つを考える．

第 1 の手立ては，上記で述べた 3 点のうち，第 2 の点として述べた点に関係する．というのも，「平均変化率を決めていること」は，多くの生徒が自力では意識化できていないことが想定される．そこで，以下の問いを比較検討（練り上げ）時に全体に投げかけ，議論することで，その意識化を促したい．

1. 位置は時間経過に従って増加していくことがわかるが，なぜ下に凸の増加ではなく上に凸の増加となるのか？
2. 時間―速度グラフの下で加えられる各長方形の面積は，時間－位置グラフのどこに表れるか？
3. 時間－速度グラフで横幅 1 としたときの面積を求めれば，それが時間－位置グラフではxが 1 増加したときのyの増加量になるから，点が決まっていき，時間－位置グラフを描ける．これは，時間－速度のグラフから数学的には何がわかったから時間－位置グラフが描けるといえるか？

グラフの作成の仕方さえわかれば，多くの生徒が上に凸の増加となる曲線（あるいは折れ線グラフ）を描くと想定されるため，まずは問い 1 として意図的にそうならない場合，すなわちなぜ下に凸の増加とはならないのかを問いかけ（ただし生徒は当然ながら第 2 次導関数は未習であるため実際には上に凸，下に凸といった言葉は使わない），長方形の面積が徐々に加えられていくが加えられる面積は小さくなっていくことを共有する．次に問い 2 で加えられる長方形の面積が時間－位置グラフではどこに表れるのかを共有したうえで，問い 3 を通して，ある点から次の点を決める際に，数学的には（既習の言葉でいうと）何を決めているのかを共有する．

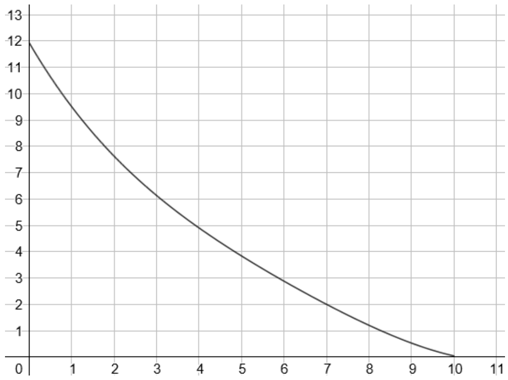
第 2 の手立ては，上記で述べた 3 点のうち，第 3 の点として述べた点に関係する．まずは，最初の時間－位置グラフを作成する際に，ある点から次の点という作成の仕方だけでなく，累積によって点を取っている生徒がいればそれを取り上げるようにしたい．仮にそうした生徒がいなかったとしても，比較検討（練り上げ）時に上記の問い 1 から 3 を通してyの増加量に目を向けさせたうえで，作成した時間－位置グラフにおける任意のxにおけるyの意味を問うことで，長方形の面積の累積がyの増加量の累積として表れていることを共有する．

４．本時案

（1）本時の目標

時間－速度グラフから時間－位置グラフを作成することを通して，ある関数$f(x)$のグラフ下の面積もxの関数（$S(x)$）であること，および関数の変化率がわかればその関数の大域的な変化を記述できることを理解する（【知識及び技能】）．また，時間－速度グラフの変化のパターンと，時間－位置グラフの変化のパターンの関係を考察する（【思考力，表現力，判断力等】）．

（2）本時の展開　※T は教師の問い，S は生徒の反応，●が主な手立て

時間	指導内容・主な発問と予想される生徒の反応	留意点
5	<u>問題提示</u> T1：　次の図は，車がブレーキをかけはじめてからの，時間と速度の関係を表したものである．ブレーキをかけはじめてから，車の位置はどのように変化するだろうか？時間と位置の関係をグラフに表してみよう．ブレーキをかけ始めたときの位置を 0m とする． 	前の物理基礎の授業では$v-t$グラフ下の面積を求めることで落下距離を求めたことを振り返り，この授業では$v-t$グラフをもとに変位の変化をよみとることが課題であることを伝える．
20	<u>自力解決</u> S1-1（時間－速度グラフとx軸で囲まれた図形の面積を求める） S1-1-1（長方形に分割）： 生徒の反応の着目点として以下がある． ➢ 横幅をどう設定するか…1，1/2，その両方，その他 ➢ 高さをどうとるか…右側（内側近似），左側（外側近似），その両方，その中央（平均），その他 ➢ 時間－距離グラフにおいて点をどうとるか…前の点から次の点をとるか，各点で$y=0$からの累積をとるか 以下には取り上げたい反応を記しておく． S1-1-1-1：横幅を 1（か 1/2）に固定し，高さを右側（か左側)のどちらか（または両方）にとり，時間－位置グラフにおいて前の点から次の点をとっている． S1-1-1-2：横幅を 1（か 1/2）に固定し，高さを右側（か左側)のどちらか（または両方）にとり，時間－位置グラフにおいて各点で$y=0$からの累積をとっている． S1-1-2：他の図形に分割している． S1-2：加速度が負の等加速度直線運動とみなしてグラフの概形をかく． S1-3：時間－速度グラフ下の面積は求めずにグラフの概形をかく．	S1-1-1-1 は反応として現れると考えている．できれば長方形の高さを右側にとっている生徒と左側にとっている生徒の両方を取り上げたい．S1-1-1-2 がいない場合は S1-1-1-1 のみ取り上げる． S1-3 や S1-4 の生徒には物

	S1-4：何をしていいかわからない．	理基礎の授業を思い出すよう促す．
20	<u>比較検討・練り上げ</u> S1-1-1-1 と S1-1-1-2 を指名し，発表してもらう． T2：そもそもなぜ長方形分割で面積を求めたのか？ S2-1：さっき物理基礎で学んだように，短い時間で区切ればその間は等速直線運動とみなせて，長方形の面積がその短い時間での変位を表すから． S2-2：最初の方の速度の変化が大きいので，内側近似と外側近似の両方をやってみた／幅を 1/2 でやってみた／高さを適当に設定してみた． T3：長方形の高さを右側にとった人もいれば左側にとった人もいる．長方形の横幅を 1/2 にとった人もいる．それらによってできる時間－位置グラフと，実際の時間－位置グラフの関係はどうなっているか？ S3-1：右側にとったグラフと左側にとったグラフの間に実際のグラフがある． S3-2：長方形の幅を 0 に近づけていくと，2 つのグラフが上下から迫ってきて，実際のグラフのある位置がより決まっていく． T4：全体的な形がわかったが，距離が増えていくにしてものように増加しないのはなぜだろう？ S4-1：徐々に減速し，6 秒後に止まるグラフにならないといけないから． S4-2：加えられる長方形の面積が徐々に小さくなっていくから． T5：加えられる長方形の面積は，時間－位置グラフの方でいうとどこに表れるか？ S5-1：横幅が 1 なら，xが 1 増加したときのy座標の増加量． S5-2：xが 1 増加するごとにyの増加量は小さくなっていくから， という形になる． T6：横幅が 1 なら，時間－速度グラフで横幅 1 としたときの面積を求めれば，それが時間－位置グラフではxが 1 増加したときの y の増加量になるから，点が決まっていき，時間－位置グラフを描ける．これは，数学的には何がわかっているから時間－位置グラフが描けるといえる？ S6-1：変化の割合． T7：さっき，横幅を限りなく 0 に近づけていけば求めたい面積にどこまでも近づくという意見があった．時間－速度グラフがわかっているということは，時間－位置グラフからみると，数学的には何がわかっているということになるか？ S7-1：瞬間的な変化の割合． S7-2：横幅はどこまでも 0 に近づくが 0 にはならないから，その幅に対	物理基礎の授業の内容理解を確かめる． 本時の主題ではないができれば極限に関わる確認もしておきたい． 手立て：問い 1 手立て：問い 2 手立て：問い 3 「平均変化率」という用語は未習である． 「変化率」も未習である．

	して時間－速度グラフでいう長方形の面積が時間－位置グラフでいうy座標の増加量になって点を細かくとっていけることになる． T8：それは時間－位置グラフでいうと何を意味している？ S8-1：2 点を結ぶ線分の傾き． T9：一方で，全体的に見たときに，グラフを作成する際にとった(x,y)のyは何を意味しているか？ S9-1：時間－速度グラフ下における時間 0 からxまでの面積の和. S9-2：それが時間－位置グラフではyの増加量の合計として表れる. S9-3：それが時間 0 から時間xまでの変位を表している.	S-1-1-1-2 のような自力解決が出なくても，ここで単位時間当たりの変位を累積していることを共有する．
5	<u>まとめと次時の課題</u> T10：今日は何がわかったか，できるようになったか. S10-1：時間－速度グラフがわかっていれば，そのグラフ下の面積を区分求積法で求めていくことで位置の変化がわかる. S10-2：時間－速度グラフがわかっているということは，時間－位置グラフからみれば瞬間的な変化の割合がわかっているということ. S10-3：長方形の横幅は限りなく 0 に近づくか 0 にはならない．その長方形の面積の合計が時間－変位グラフではyの増加量の合計として表れている.	時間によっては T10 の問いかけにより振り返りを記述させ，S10 にあたるような認識がつくられているかを評価できるようにする．

６．本時の評価

- 【知識及び技能】本時の授業でわかったことや大切なこととして，ある関数 f(x)のグラフ下の面積も x の関数（S(x)）であることや，関数の変化率がわかったからその関数の大域的な変化がわかることに関わることを振り返りとして記述している．
- 【思考力，表現力，判断力等】時間－速度グラフの変化のパターンと，時間－変位グラフの変化のパターンの関係の考察をワークシートの記述している．

引用参考文献

磯田正美（2015)．『算数・数学教育における数学的活動による学習過程の構成：数学化原理と表現世界―微分積分への数量関係・関数領域の指導』．共立出版．

国友正和ほか（2017)．『改訂版物理基礎』．数研出版．

成田慎之介・小林廉（2019)，「微分積分学の基本定理の創出を志向した高校数学における微分積分の教材開発―『数学　第一類』を手がかりとして―」，『日本数学教育学会誌』，101，9，2-12.

佐藤文隆ほか（2013)．『物理基礎』．実教出版．

スチュワート，J．著，伊藤雄二・秋山仁監訳，飯田博和訳（2017)．『スチュワート微分積分学 I(原著第 8 版)：微積分の基礎』．東京化学同人．

東京学芸大学附属国際中等教育学校数学教育研究会（2019)，『TGUISS 数学 5・6』，サンプロセス．

TGUISS 数学Ⅱ　２学期　　　月　　日　　５年　　　組　　　番　氏名

2-5 探究　位置はどのように変化する？

以下の，上側のグラフは，まっすぐな道路を走っている車がブレーキをかけはじめてからの時間 $t\ [s]$ と速度 $v\ [m/s]$ の関係を表したものである．

このとき，車の位置 $y\ [m]$ は，ブレーキをかけはじめてからはどのように変化するだろうか？ブレーキをかけ始めたときの位置を 0m として，時間と位置の関係を表すグラフの概形をかいてみよう．