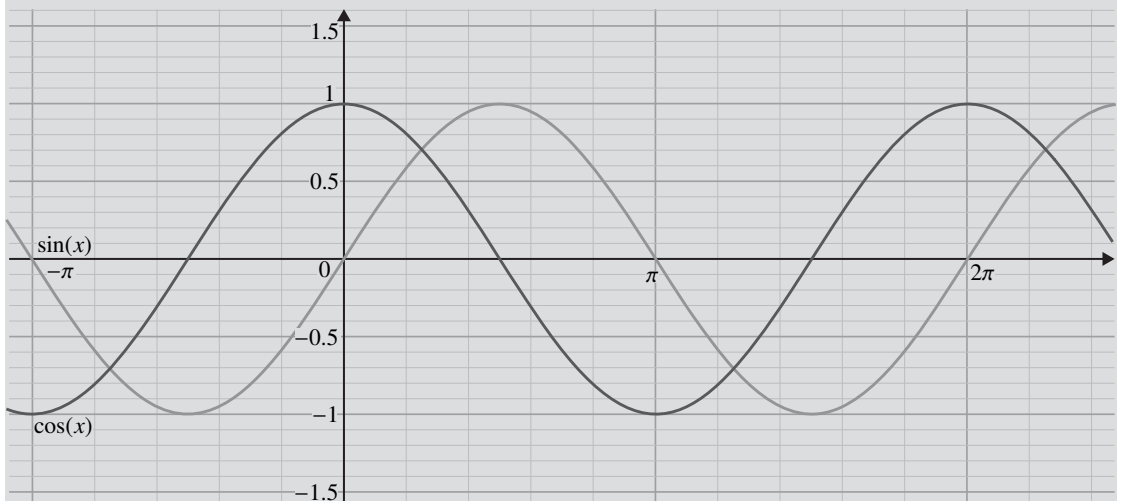
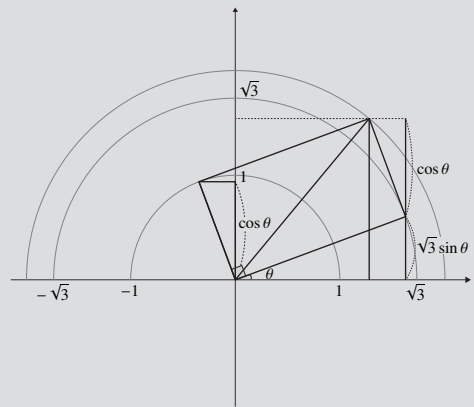
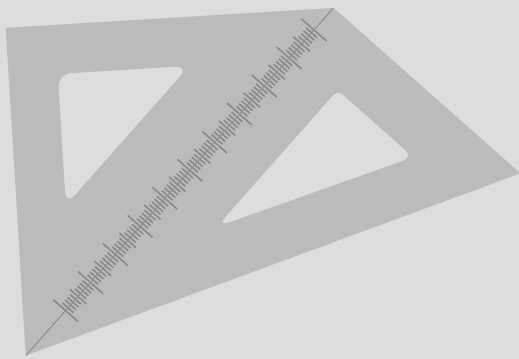


第2章

三角関数



§ 1 三角関数とそのグラフ

探究 1 観覧車のゴンドラの位置はどのように表される？

お台場にあるパレットタウンの大観覧車は、乗客を楽しませるサービスが充実しているため、大変人気の施設となっている。さらに楽しさを増すような充実したサービスやプログラムを提案してみよう。

りゅうへいさんが調べたところ、横浜にあるコスモクロック21では、かつて近隣のホテルのプランとして、夜景を独占できるゴンドラ貸し切りデートプランがあったという。これは、特別仕様ゴンドラを2人だけで30分間貸し切り乗車でき、持参したCDを流す演出をすることができるものである。りゅうへいさんはこれを参考にして、新たなプログラムを考えることにした。

問 1 パレットタウン大観覧車で同じゴンドラに30分間乗り続けたとき、そのゴンドラはどのくらい回転することになるか。また、このときのゴンドラの位置はどのように表されるか。

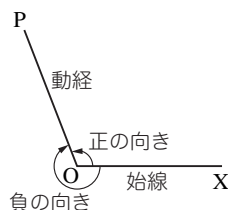
大観覧車仕様	
高さ	115 m (リング直径100 m)
ゴンドラ数	64 台 (そのうち4台はシースルーゴンドラ)
搭乗時間	約16分
定員	6人 (カラーゴンドラ) 4人 (シースルーゴンドラ)

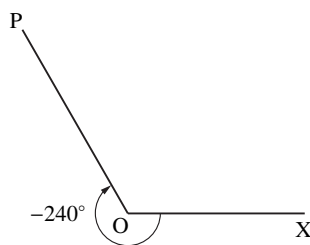
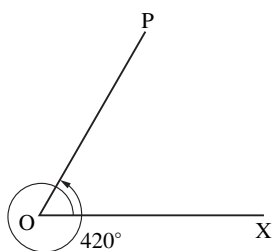
PALETTE TOWN大観覧車 <http://www.daikanransha.com/> より作成
(2017年9月時点)

平面上で、点Oを中心として半直線OPを回転させることを考えてみよう。このとき、回転する半直線OPを**動径**といい、動径の始めの位置を示す半直線OXを**始線**という。

回転には2つの向きがあり、時計の針の回転と反対の向きを**正の向き**、時計の針の回転と同じ向きを**負の向き**という。

また、正の向きの回転の角を**正の角**、負の向きの回転の角を**負の角**という。例えば、負の向きに 30° 回転したとき、この角を -30° と表す。また、正の向きに1回転とさらに 60° 回転したとき、この角を 420° と表す。このように、負の角や 360° よりも大きい角にまで意味を広げて考えた角を**一般角**という。また、一般角 θ に対して、始線OXの位置から点Oのまわりに θ だけ回転させた動径を、**角 θ の動径**という。例えば、半直線OXを始線とし、動径OPを 420° 、 -240° 回転させると、それぞれ次のようになる。





一般に、動径 OP と始線 OX のなす角の1つを α とすると、動径 OP の表す一般角 θ は、次のように表される。

$$\theta = \alpha + 360^\circ \times n \quad (n \text{ は整数})$$

確認 1 次の角の動径を図示しなさい。また、それぞれの角の動径の表す一般角を $\alpha + 360^\circ \times n$ の形で表しなさい。ただし、 $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ とする。

- (1) 150° (2) 1000° (3) -450°

問 2 りゅうへいさんは、2周貸し切り乗車でき、残り5分でお気に入りの一曲を流し始められるプログラムを提案することにした。お気に入りの一曲を流し始めるときのゴンドラの高さはどのくらいだろうか。

Q 問2で考えたことを、座標平面で表してみよう。

- 1 この事象を座標平面で表すためには、どのようなことを考えなければならないだろうか。
- 2 1 で考えたものの中から、観覧車の中心が原点になるような円を考えてみよう。始線を x 軸の正の部分に定めたとき、 210° 、 315° の正弦、余弦、正接はどのように定義すればよいだろうか。
- 3 2 において、 θ が第3象限、第4象限のときの正弦、余弦、正接はどのように定義すればよいだろうか。
- 4 3 の定義が、以下の等式を満たすか調べることで、その定義が妥当であるか確かめてみよう。

① $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

② $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

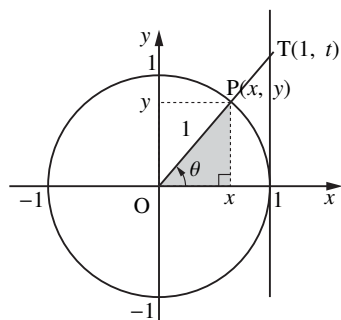
③ $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$

座標平面上で、原点を中心とする半径1の円をかく。そして、 x 軸の正の部分を開始として、角 θ の動径と円Oとの交点を $P(x, y)$ とする。三角比のときと同様にして、一般角 θ に対する正弦、余弦、正接を、次のように定義できる。

$$\sin \theta = y, \quad \cos \theta = x, \quad \tan \theta = t$$

このとき、 x 、 y 、 t の値は角 θ だけによって一意に決まる。したがって、正弦、余弦、正接は θ の関数で、これらをまとめて θ の三角関数という。

ただし、 $\tan \theta$ は $\theta = 90^\circ + 180^\circ \times n$ (n は整数)となるような θ の値に対しては定義されない。



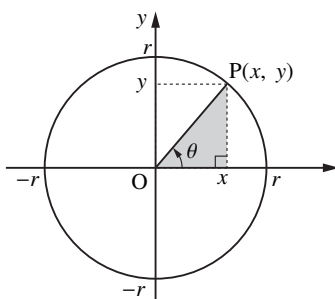
三角関数の定義により、正弦、余弦、正接の値域は次のようになる。

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1$$

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1$$

$\tan \theta$ はすべての実数値をとる

原点Oを中心とする半径rの円で三角関数はどう表わされるか考えてみよう。



確認2 θ が次の値のときの三角関数の値をそれぞれ求めなさい。

(1) 330°

(2) 405°

(3) -60°

(4) 630°

これまで、角の大きさを表すのに、直角の $\frac{1}{90}$ である1度を単位とする**度数法**というものを用いてきた。ここでは角の大きさを表す新しい単位を考えてみよう。

Activity

コンパスで、点Oを中心とする、半径が3cm、5cmの円 C_1 、 C_2 をかきなさい。Oから半直線をひき、 C_1 、 C_2 との交点をそれぞれ A_1 、 A_2 としなさい。次にひもを使って、 A_1 、 A_2 から弧の長さが半径と等しくなるような点を見つけ、その点を B_1 、 B_2 としなさい。

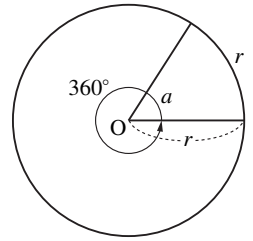
$\angle B_1OA_1$ と $\angle B_2A_2$ の大きさはどうなっているか。また、半径が3cm、5cm以外の円 C_3 をかき、 C_3 と OA_2 の延長との交点を A_3 とし、 OB_2 の延長との交点を B_3 とすると、弧 A_3B_3 の長さについてどのようなことがいえるか。

1つの円において、半径に等しい長さの弧をとり、その弧に対する中心角を α とする。弧の長さは中心角に比例するから、円の半径を r とすると、

$$r : 2\pi r = \alpha : 360^\circ$$

よって、

$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.2958^\circ$$



この α は円の半径によらない一定の角である。この角を1ラジアンまたは1弧度といい、これを単位とする角の表し方を弧度法という。なお、弧度法では、単位のラジアンを省略することが多い。

$$1 \text{ ラジアン} = \frac{180^\circ}{\pi} \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ ラジアン}$$

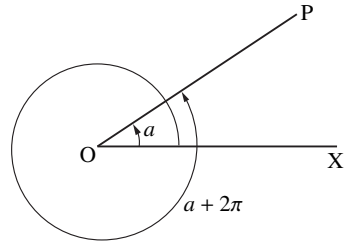
ラジアンは「rad」ともかくよ。



弧度法を用いると、角 α の動径OPの表す一般角 θ は、

$$\theta = \alpha + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

と表される。



確認3 次の表は、度数法と弧度法の換算表である。㉗～㉛の値を求めなさい。

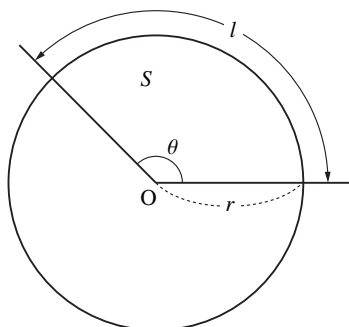
度数法	0°	30°	㉗	㉘	90°	㉙	135°	150°	180°	360°
弧度法	㉜	㉝	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	㉚	$\frac{2\pi}{3}$	㉞	㉟	π	㉛

確認4 次の角の動径が表す一般角を、 $\alpha + 2n\pi$ (n は整数) の形で表しなさい。ただし、 $0 \leq \alpha < 2\pi$ とする。

(1) $\frac{20}{3}\pi$

(2) $-\frac{19}{4}\pi$

確認5 半径が r ，中心角 θ のおうぎ形の弧の長さを l とする。おうぎ形の弧の長さ l と面積 S を r と θ を用いて表しなさい。



確認6 半径が6，中心角が $\frac{2\pi}{3}$ のおうぎ形の弧の長さ l と面積 S を求めなさい。

確認7 θ が次の値のときの三角関数の値をそれぞれ求めなさい。

(1) $\frac{11}{6}\pi$

(2) $-\frac{5}{6}\pi$

(3) $-\frac{4}{3}\pi$

(4) $\frac{9}{4}\pi$

(5) $-\frac{7}{6}\pi$

探究 2 観覧車のゴンドラの高さはどう変化する？

めぐみさんは、りゅうへいさんとは別のプログラムとして、観覧車から見えるスポットと、その見える時間を知らせるようなものを取り入れることを考えた。

問 1 この観覧車では、どこまでの範囲を見渡せることが可能であるか。



「この地図は、国土地理院地図（電子国土web）を使用したものである。」

問 2 たとえば、海ほたるが見えるとしたら、見え始めときのゴンドラの高さを求めなさい。

問 3 めぐみさんは、この観覧車から海ほたるを何分間見ることができるかを考えることにした。ゴンドラが始めの位置から角度にしてどのくらい動いたのかがわかれば、何分間見えるかがわかる。まずは、観覧車のゴンドラの高さ h を、角度 θ の関数として表してみよう。

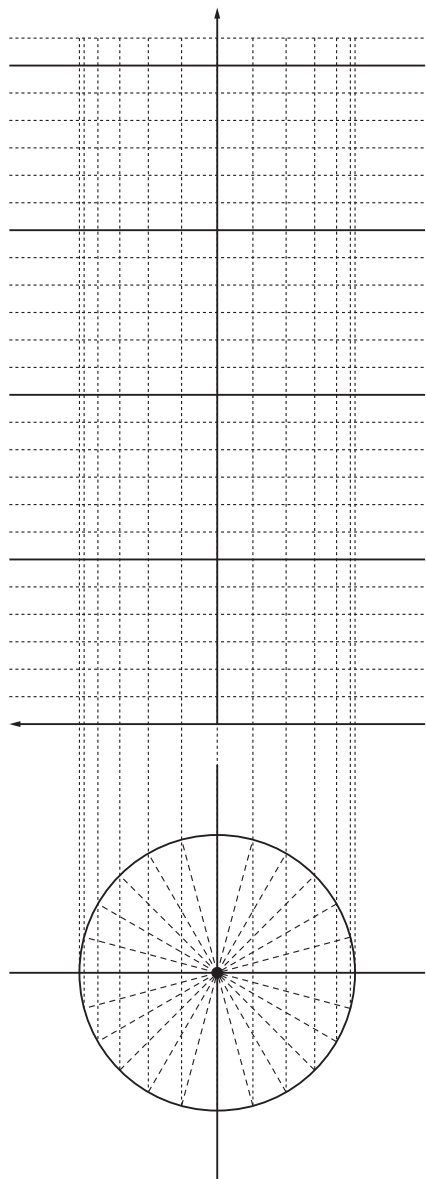
問 4 問3で求めた関数の式をグラフ電卓に入力して、その高さの変化について考えよう。

「SHIFT」「MENU」で Angle（角度）が Rad になっているか確認しよう

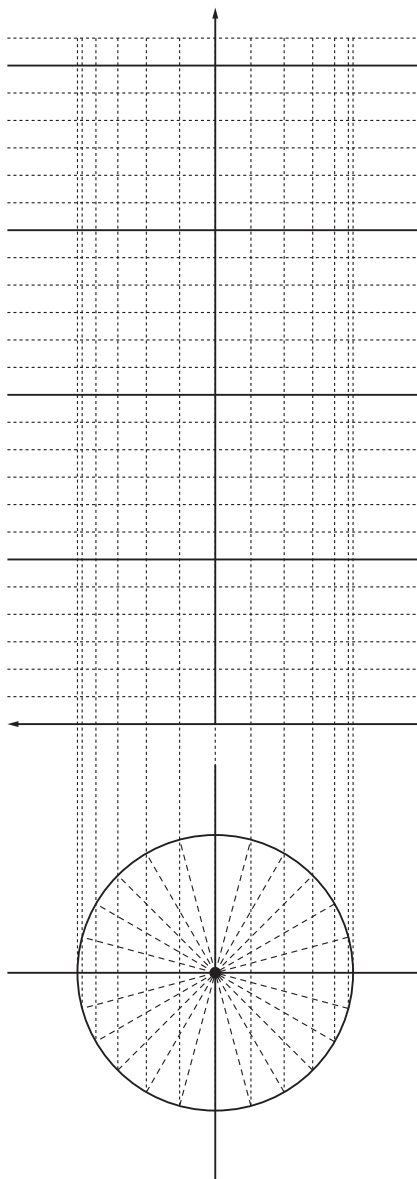


Q $y = \sin \theta$, $y = \cos \theta$ のグラフをそれぞれかいてみよう。また、そのグラフからわかることをあげてみよう。

$$y = \sin \theta$$



$$y = \cos \theta$$



動径は1回転すると元の位置に戻るから、次のことが成り立つ。

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta, \quad \cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta$$

一般に、関数 $y = f(\theta)$ が 0 でない定数 c に対して、常に、

$$f(\theta + c) = f(\theta)$$

となるとき、 $f(\theta)$ の値は、変数 x の値が c だけ増加するごとに同じ変化を繰り返す。このような関数を c を周期とする周期関数という。すなわち、 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ は 2π の周期をもつ周期関数であることがわかる。

ふつう周期といえば、正の周期のうちで最小のものを指すよ。

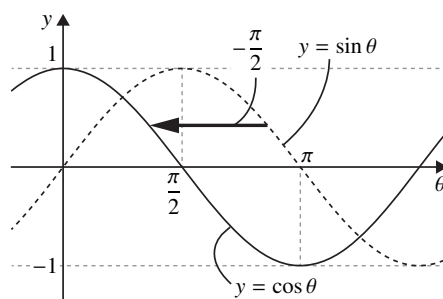


また、

$$\cos x = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

であるから、 $y = \cos \theta$ のグラフは $y = \sin \theta$ のグラフを θ 軸方向

に $-\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動したものであることがわかる。



$y = \sin \theta$ や $y = \cos \theta$ のグラフの形をした曲線を正弦曲線というよ。



確認 1 次の等式が成り立つことを確認しなさい。

- (1) $\sin(-\theta) = -\sin \theta$, $\sin(-\theta) = \sin \theta$
 (2) $\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$, $\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$

確認 2 次の関数のグラフをかきなさい。また、その周期を答えなさい。

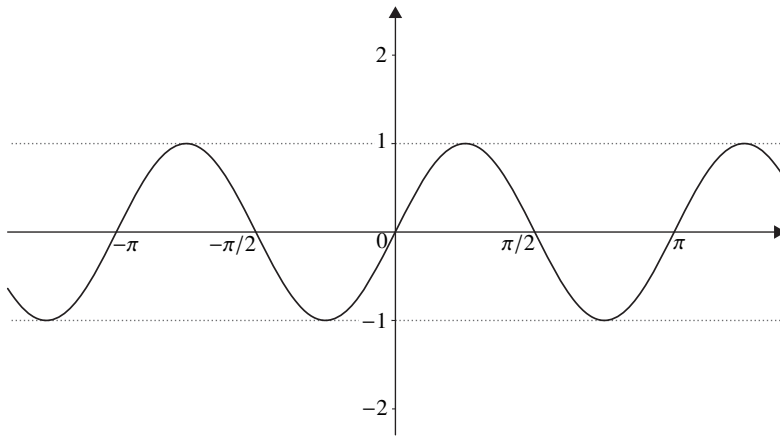
- (1) $y = 2 \sin \theta$ (2) $y = 4 \cos \theta$ (3) $y = -\sin \theta + 4$
 (4) $y = -2 \cos \theta - 2$ (5) $y = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ (6) $y = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$

確認 3 「 $y = \sin\left(-\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ のグラフは、 $y = \sin(-\theta)$ のグラフを θ 軸方向に $-\frac{\pi}{3}$ だけ平行移動したものである。」

は、正しいと言えるだろうか。また、そう考える理由を説明しなさい。

Q 周期が 2π でない正弦、余弦のグラフの式は、どのように表されるだろうか。

たとえば、次のグラフはどのような式で表されるだろうか。



k が正の定数のとき、関数 $y = \sin k\theta$ ($y = \cos k\theta$) の周期は、 $y = \sin \theta$ ($y = \cos \theta$) のグラフを横軸の方向に $\frac{1}{k}$ 倍に縮小したもので周期は $\frac{2\pi}{k}$ である。

問 5 この観覧車から海ほたるを何分間見ることができるか答えなさい。

問 6 ここまで考えた関数は、回転した角度がわかれば、そのときの高さがわかるというものであった。しかし実際に乗っているのは、どれだけ回転したかはわからない。乗ってからどれだけ時間が経ったかはわかるため、乗っている時間がわかればそのときの高さがわかるようにしたい。これまでの解決をもとにして、時間から高さを特定する式を求めなさい。

確認 4 次の θ についての方程式・不等式を解きなさい。ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

(1) $\sin \theta = -\frac{1}{2}$

(2) $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

(3) $\cos \theta > \frac{1}{\sqrt{2}}$

(4) $\sqrt{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) < 1$

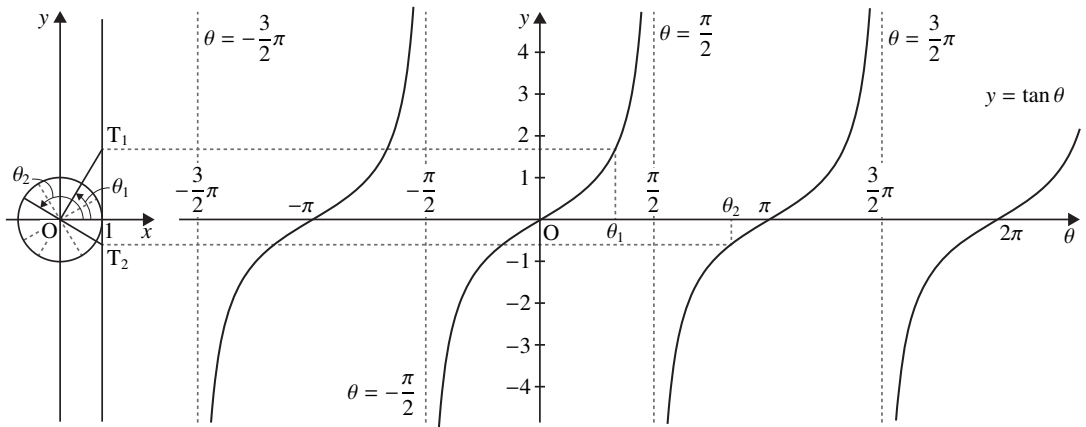
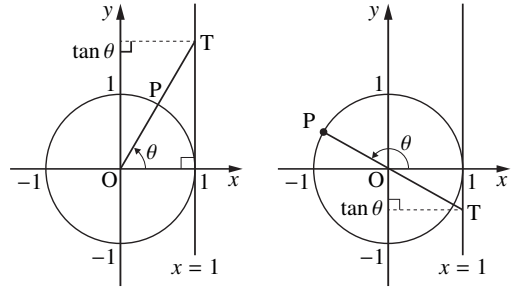
やってみよう!



ここまでで、観覧車から海ほたるが見える時間を知らせるプログラムを考えた。同様に、海ほたる以外のスポットとその見える時間を調べてみよう。

Q 正接 (tan) のグラフはどのような形になるだろうか。まずは予想し、グラフ電卓で確かめてみよう。

右の図のように、角 θ の動径を OP とし、直線 OP と直線 $x = 1$ の交点を T とすると、 $T(1, \tan \theta)$ すなわち、 T の y 座標が $\tan \theta$ に等しい。このことを利用して、関数 $y = \tan \theta$ のグラフをかくと、以下ようになる。



奇関数になっているかな。偶関数になっているかな。



$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で考えると、関数 $y = \tan \theta$ のグラフは、 θ が $\frac{\pi}{2}$ に近づくにしたがって、直線 $\theta = \frac{\pi}{2}$ に限りなく近づく。

このように、グラフが一定の直線に限りなく近づくとき、その直線をグラフの漸近線という。 $y = \tan \theta$ のグラフは、次の直線を漸近線にもつ。

$$\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

周期関数かな？



確認5 次の等式が成り立つことを示しなさい。

(1) $\tan(-\theta) = -\tan \theta$ (2) $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \theta}$

確認6 次の θ についての方程式・不等式を解きなさい。ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

(1) $\sqrt{3} \tan \theta + 1 = 0$ (2) $\tan \theta \geq 1$