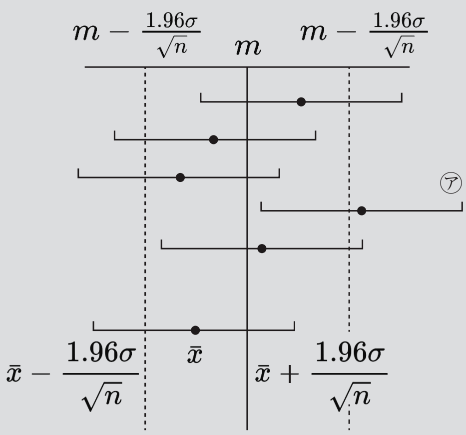
# もくじ
INDEX

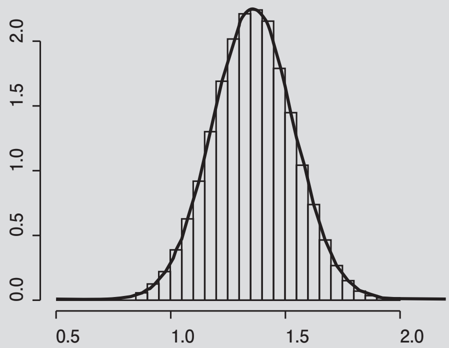
## 第1章　推測統計

第1章

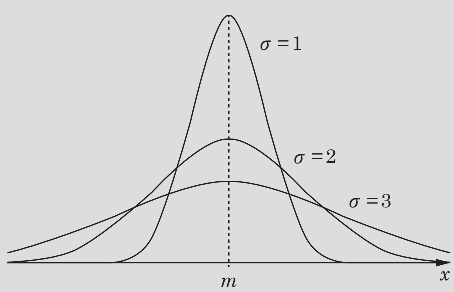
# 推 測 統 計



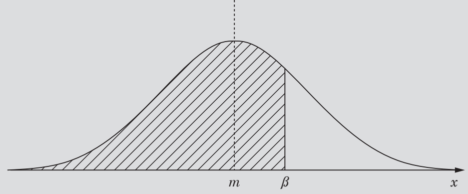
$m-\frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}$
$m$
$m-\frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}$
ア
$\bar{x}-\frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}$
$\bar{x}$
$\bar{x}+\frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}$

0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
0.5
1.0
1.5
2.0

$\sigma=1$
$\sigma=2$
$\sigma=3$
$m$
$x$

$m$
$\beta$
$x$

# §3　仮説と検定

**探究 1**　ガチャの確率表記は本当か？

スマホアプリのゲームにおいて今や欠かせない要素となったのが「ガチャ」である。ガチャについては，課金に多額を投じるといった問題が以前から指摘されてきた。そんななか，2017年12月，Apple社がアプリに関するルールを改訂し，ガチャの個別アイテムごとの当選確率の表示が義務付けられるようになった。

あるゲームにおけるガチャで，最高レア度のアイテムが当たる確率は３％と表記されている。ところが，このゲームをしているしょうへいさんは，200回ガチャを回して１回しか最高レア度のアイテムが当たらなかった。しょうへいさんは，最高レア度のアイテムが当たる確率は３％より低いのではないかと運営側を疑っている。運営側が間違っているのだろうか。それとも，しょうへいさんの運が悪いだけなのだろうか。

以下，最高レア度のアイテムが当たる確率を$p$と表す。

**■問１**　運営側は $p=0.03$ であると主張している。それに対して，しょうへいさんの主張を，$p$を用いて表しなさい。

**■問２**　しょうへいさんが運営側を疑っているのは，「もし運営側の表記 $p=0.03$ が正しければ，200回ガチャを回して最高レア度のアイテムが１回しか当たらないなんてことは滅多に起こらないはずだ」と考えているからである。$p=0.03$ が正しいと仮定するとき，200回ガチャを回して最高レア度のアイテムが１回しか当たらない確率を求めてみよう。あなたはその値を「滅多に起こらない」とみなすだろうか。

**■問３**　**問２**の確率を求めたさわさんは，しょうへいさんのような主張をしたいなら，「$p=0.03$ が正しいと仮定するとき，200回ガチャを回して最高レア度のアイテムが１回も当たらない確率」も加味する必要があると考えている。この考えに対してあなたはどう考えるか。

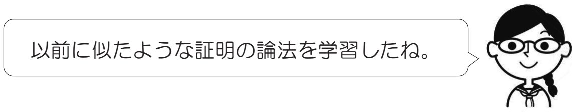
**■問４**　運営側が間違っているのか，それともしょうへいさんの運が悪いだけなのかを判断してみよう。

**問１**では，運営側の主張である「$p=0.03$」に対して，しょうへいさんはそれと対立する**仮説**を立てたことになる。このとき，「$p=0.03$」は，しょうへいさんにとっては誤っていることを示したい仮説となる。もし誤っていることを示せたとき，「$p=0.03$」という仮説は棄却されるという。

このように，もとの（棄却したい）仮説を**帰無仮説**，これと対立する（採択したい）仮説を**対立仮説**という。

**問２**以降では,「200回ガチャを回して１回だけ当たった」という標本の情報に基づいて，対立仮説を採択できることを検証しようとしている。その検証の流れは以下のとおりである。

> 帰無仮説（$p=0.03$）が真であると仮定すると，200回ガチャを回したのに当たっても１回であることは滅多に起こらないことがわかる。しかし，実際にそれが起きたということは，帰無仮説（$p=0.03$）が真であると仮定したことが誤りだった。したがって帰無仮説（$p=0.03$）を棄却し，対立仮説（**問1**で立てたもの）を採択する。




**問２**では，上記下線部の「滅多に起こらない」と言える確率の基準を定めることが必要になる。この確率の基準を**有意水準**という。有意水準は，通常，５％や１％が採用される。

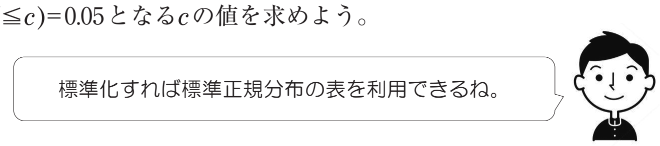
有意水準を５％に設定すると,「$p=0.03$が正しいと仮定するとき，200回ガチャを回して最高レア度のアイテムが当たっても１回である確率」は約1.6%であり，有意水準を下回る。したがって，これは「滅多に起こらない」と言えるので,「$p=0.03$」を棄却することになる。ただし，この方法は完全に正しいわけではない。なぜなら，$p=0.03$が正しいときでも，200回ガチャを回して最高レア度のアイテムが当たっても１回であることは約1.6%の確率で起こるため, 今回はたまたまその場合だったかもしれないからである。したがって,「$p=0.03$」が正しいのにこれを棄却してしまう誤りをしている可能性がある。有意水準は，この誤りを犯す確率を５％や１％以内に定めているともいえる。帰無仮説が正しいかもしれないのにこれを棄却してしまうという誤りを犯す危険があるという意味で，有意水準という用語の代わりに**危険率**という用語が使われることもある。

一般に，母集団に関する仮定を**統計的仮説**といい，母集団から取り出した標本の情報に基づいて，その仮説を否定すべきかどうかを判断する方法を**仮説検定**という。

### Q　探究１について，正規分布を用いて仮説検定してみよう

**探究１**では標本の数が大きいので，$n=200$，$p=0.03$とした二項分布$B(n,p)$を正規分布$N(np,np(1-p))$で近似して，確率の計算を行ってみよう。

$\boxed{1}$　有意水準として５％としよう。$P(X\leqq c)=0.05$となる$c$の値を求めよう。




有意水準によって決まる，帰無仮説を棄却すべき統計量の値の集合を**棄却域**という。

$\boxed{2}$　$\boxed{1}$より，帰無仮説を棄却できるかどうか決定しよう。

$\boxed{3}$　有意水準として１％を採用したときについても同様に仮説検定してみよう。

標準正規分布に従う確率変数

$$z = \frac{x - m}{\sigma}$$

を用いて仮説検定を行うとき，$Z$は検定統計量$Z$と呼ばれることがある。

**確認 1**　**探究 1** と同じ状況で，200回ガチャを回してみたら最高レア度のアイテムが２回出現したとする。このとき，運営側が間違っているという主張はできるだろうか。

## 探究 2　エアコンは適切に作動しているか？

たかしさんは，ある会社のエアコンが設定温度を保てているかをテストするために，設定温度を25度とし，10日間にわたって一定の間隔で室内温度を100回測定した。

| No. | 温度 | No. | 温度 | No. | 温度 | No. | 温度 | No. | 温度 | No. | 温度 | No. | 温度 | No. | 温度 | No. | 温度 | No. | 温度 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 25.5 | 11 | 23.5 | 21 | 27.0 | 31 | 24.4 | 41 | 25.0 | 51 | 25.0 | 61 | 25.0 | 71 | 26.0 | 81 | 26.0 | 91 | 25.5 |
| 2 | 24.9 | 12 | 24.0 | 22 | 26.5 | 32 | 24.5 | 42 | 25.4 | 52 | 24.5 | 62 | 24.7 | 72 | 26.0 | 82 | 26.0 | 92 | 25.0 |
| 3 | 26.0 | 13 | 25.0 | 23 | 26.0 | 33 | 24.8 | 43 | 25.5 | 53 | 24.5 | 63 | 24.9 | 73 | 25.5 | 83 | 26.3 | 93 | 26.0 |
| 4 | 26.0 | 14 | 25.0 | 24 | 26.1 | 34 | 23.8 | 44 | 26.0 | 54 | 24.0 | 64 | 25.0 | 74 | 25.5 | 84 | 26.2 | 94 | 26.2 |
| 5 | 26.5 | 15 | 26.0 | 25 | 24.5 | 35 | 23.5 | 45 | 26.0 | 55 | 24.0 | 65 | 25.5 | 75 | 25.0 | 85 | 26.0 | 95 | 25.0 |
| 6 | 25.1 | 16 | 25.3 | 26 | 24.5 | 36 | 24.0 | 46 | 26.5 | 56 | 24.0 | 66 | 25.5 | 76 | 25.0 | 86 | 26.0 | 96 | 25.8 |
| 7 | 25.0 | 17 | 25.5 | 27 | 25.0 | 37 | 24.0 | 47 | 26.5 | 57 | 23.8 | 67 | 26.0 | 77 | 24.5 | 87 | 27.0 | 97 | 25.5 |
| 8 | 24.7 | 18 | 25.5 | 28 | 24.5 | 38 | 24.5 | 48 | 25.5 | 58 | 23.5 | 68 | 25.7 | 78 | 24.5 | 88 | 26.5 | 98 | 25.0 |
| 9 | 24.0 | 19 | 26.3 | 29 | 24.0 | 39 | 24.5 | 49 | 25.5 | 59 | 23.0 | 69 | 26.5 | 79 | 25.0 | 89 | 26.0 | 99 | 25.0 |
| 10 | 24.0 | 20 | 26.5 | 30 | 24.5 | 40 | 24.5 | 50 | 25.0 | 60 | 24.0 | 70 | 26.5 | 80 | 26.0 | 90 | 25.1 | 100 | 25.0 |

結果的に，この100回分の測定値の平均は25.2，標準偏差は0.9となった。この結果を受けて，たかしさんは，このエアコンは正しく作動していないと考えている。たかしさんの考えは正しいだろうか。

**■問１**　たかしさんの考えに基づいて，帰無仮説と対立仮説を設定してみよう。

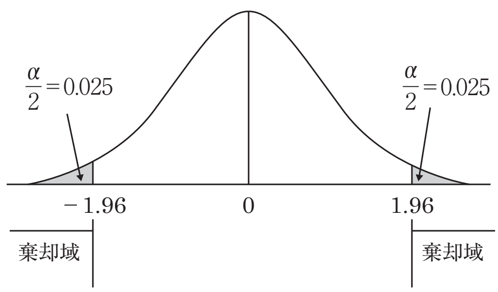
**■問２**　100回分ごとの測定値の標本平均$\overline{X}$を確率変数とみなすと，これはどんな分布に従うと考えられるか。

**■問３**　標本平均$\overline{X}$を標準化した確率変数$Z$において，有意水準を５％に設定したときの棄却域を求めなさい。

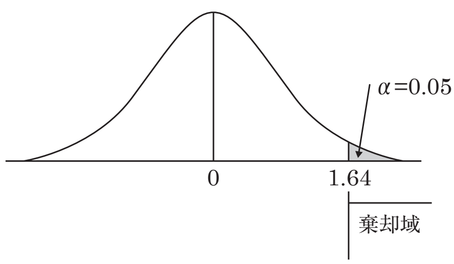
**探究２**で対立仮説を$m \neq 25.0$とすると，検定統計量Ｚが０から左右に大きくはずれた（これは有意水準によって決まる）領域に含まれる可能性があり，その場合は帰無仮説$m=25.0$が棄却される。このように，検定統計量が左右両方向に外れる可能性がある検定を**両側検定**という。

一方で，**探究１**では対立仮説が$p<0.03$であり，検定統計量$Z$が０より小さい方に大きくはずれた領域に含まれたため，帰無仮説が棄却されることになった。このように，検定統計量が左右のいずれかの方向に外れる可能性がある検定を**片側検定**という。左右両側に棄却域があるのが両側検定であり，片方にしかないのが片側検定である。

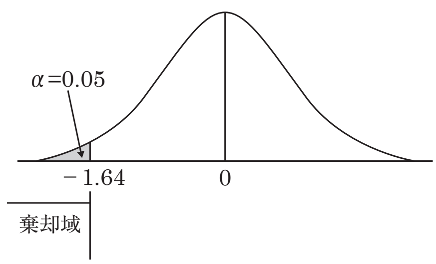
**探究２**では，25度より高いときや低いときの両方が多くあって「$m \neq 25.0$」を主張したいので両側検定を用い，**探究１**ではアイテムが出る回数が少なすぎて「$p<0.03$」を主張したいので片側検定を用いたのである。




両側検定




右片側検定




左片側検定

標準正規分布における棄却域の例
（上記の図は有意水準を$\alpha$として$\alpha=0.05$のとき）

**■問４**　有意水準５％で両側検定を用いて仮説検定を実施し，たかしさんの考えが正しいかどうかを判断してみよう。

**■問５**　もし，100回分の測定値において，標準偏差は変わらず0.9であったが，平均は25.1だったら，**問４**の結論は変わるだろうか。

帰無仮説が棄却されない場合，単に，結果が帰無仮説と矛盾はしないことが示されただけであって，帰無仮説が積極的に支持されたわけではないことに注意が必要である。したがって，帰無仮説が棄却されないときには，たとえば「母平均は25℃である」とは断言せず，「(得られた標本では) 母平均が25℃でないとはいえない」と表現することが多い。

**確認1** ある会社のLED電球の平均寿命は従来40000時間であったが，その会社では品質を改善した結果，平均寿命が長くなったと主張している。そこで，新製品100個を無作為に抽出して検査したところ，その平均寿命は41000時間，標準偏差は6500時間であった。この会社の主張は信用してよいか。有意水準５％で検定しよう。